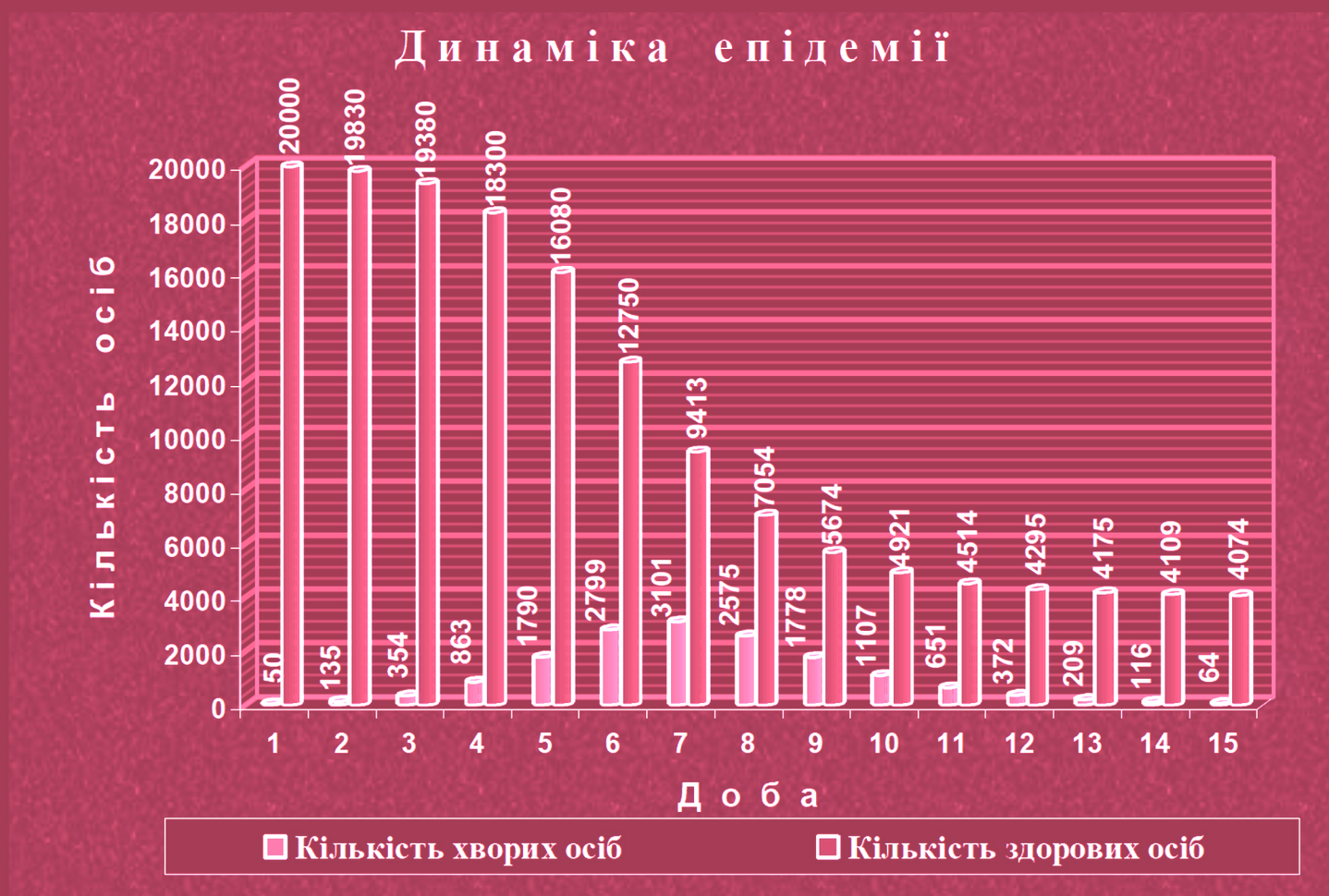


І.Г. Баланенко, С.О. Горбонос, А.В. Сясєв

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь



Дніпро
2020

**Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара**

І.Г. Баланенко, С.О. Горбонос, А.В. Сясєв

**Посібник до вивчення курсу
«Диференціальні рівняння»**

*Рекомендовано Вченою радою
Дніпровського національного університету
імені Олеся Гончара
Протокол № 8 від 30.01.2020 р.*

**Дніпро
РВВ ДНУ
2020**

УДК 517.9:[5](075/8)
П61

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, проф., В. В. Лобода
канд. фіз.-мат. наук, доц. Є. П. Кришко

П61 Посібник до вивчення курсу «Диференціальні рівняння» [Текст] /
І. Г. Баланенко, С. О. Горбонос, А. В. Сясєв. – Дніпро: РВВ ДНУ, 2020. – 88 с.

Розглянуто методи і прийоми побудови математичних моделей, складання та розв'язання диференціальних рівнянь для природничих, технічних, суспільних і гуманітарних явищ і процесів.

Диференціальні рівняння складають на основі відомих законів природознавства. Наведено задачі, які розбито за типами, і в кожному із випадків указано, яким чином потрібно скласти диференціальне рівняння. Запропоновано завдання для самостійної роботи і список рекомендованої літератури.

Видання призначено для студентів, які вивчають курс «Диференціальні рівняння» і складено відповідно до програми курсу. Окрім того, матеріалом посібника можна скористатися під час написання курсових і кваліфікаційних робіт.

Темплан 2020, поз. 8

Навчальне видання

Ірина Григорівна Баланенко
Світлана Олексіївна Горбонос
Андрій Валерійович Сясєв

Посібник до вивчення курсу «Диференціальні рівняння»

Редактор В.О. Насєкан
Техредактор Т.І. Севост'янова
Коректор О.В. Бец

Підписано до друку 30.01.2020. Формат 60х84/16. Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк.арк. 5.1. Ум. фарбовідб. 5.1. Обл.-вид. арк. 4,0.
Тираж 20 пр. Зам.№ .

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010.
ПП «Ліра ЛТД», вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49107.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК №6042 від 26.02.2018р.

© Баланенко І.Г., Горбонос С.О., Сясєв А.В., 2020

Вступ

Диференціальні рівняння є теоретична основа багатьох моделей, застосовних у науці і техніці, зокрема у фізиці, хімії, біології і багатьох інших галузях науки. Скажімо, багато задач фізики здатні привести до необхідності розв'язання диференціальних рівнянь. Це обумовлено тим, що практично всі фізичні закони, що описують фізичні процеси, які змінюються з часом, являють собою диференціальні рівняння деяких функцій, які характеризують такі процеси. Розв'язання означених рівнянь виявляється важливим завданням для багатьох сфер діяльності людини, а крім того, відіграє важливу роль у пізнанні навколишнього світу.

Диференціальні рівняння об'єднують і узагальнюють багато ідей математичного аналізу, розкривають сутність методу нескінченно малих як найважливішого засобу пізнання явищ дійсності. Вони виникають під час математичного формулювання прикладних задач у диференціальних символах.

Диференціальне рівняння описує рух тіл у силових полях (наприклад, заряду в електромагнітному полі), динаміку рідин і газів (наприклад, атмосфери і океану, необхідних для передбачення погоди), поширення тепла та ін.

Ефективність застосування диференціальних рівнянь забезпечують історичні початки самих диференціальних рівнянь і сучасні погляди на багато законів природи під кутом зору диференціальних рівнянь, додатки диференціальних рівнянь в сучасній науці і техніці, розвиток методів інтегрування і загальної теорії диференціальних рівнянь, високий рівень обчислювальної математики і техніки.

Для опису багатьох фізичних явищ використовують поняття функції та її похідних. Розглянемо такі приклади.

1. Рух матеріальної точки в просторі можна описати трьома її координатами x, y, z - функціями часу t .

2. Для опису напруженого стану стелі кімнати потрібно задати напругу як функцію двох координат x, y точки стелі. У різних точках стелі напруга буде різною.

3. Температура T нерівномірно нагрітого тіла, яке охолоджується – це функція чотирьох змінних: x, y, z – координати точки тіла і t – час.

У багатьох випадках такі функції не можна визначити експериментально: напругу в будівельній конструкції потрібно знати до її побудови, щоб забезпечити надійність споруди; у випадку направленого польоту, наприклад, супутника на Місяць, необхідно заздалегідь вміти розраховувати траєкторію польоту. Ці функції можна визначити за допомогою рівнянь, які математично виражають вплив законів природи на досліджуване явище. У більшості випадків отримані рівняння містять похідні шуканих функцій і їх називають *диференціальними рівняннями*.

У результаті застосування такого підходу одержуємо диференціальні рівняння, які математично виражають закони природи. Невідомими в цих рівняннях є функції одного або багатьох аргументів.

Видання присвячено розв'язуванню задач, здатних привести до звичайних диференціальних рівнянь. Такі задачі ілюструють математичну подібність між абсолютно різними явищами. Наприклад, процес радіоактивного розпаду, розмноження бактерій, пружні коливання, електричні ланцюги описують одні і ті ж диференціальні рівняння.

Складання диференціальних рівнянь є важливе і водночас складне питання. Універсального методу, прийнятого для всіх випадків, практично не існує, оскільки потрібен досвід і певні навички для розв'язання різних задач, що досягається аналізом численних виконаних завдань і самостійним розв'язанням аналогічних прикладів. До того ж необхідні знання відповідної прикладної дисципліни.

Скласти диференціальне рівняння, яке б описувало будь-яке явище або будь-який процес природознавства, часом виявляється не простіше, ніж його розв'язати. Як ми уже зазначали, універсального методу побудови диференціального рівняння не існує, натомість можна виділити деякі загальні підходи вирішення цієї проблеми.

Для всіх задач на побудову диференціального рівняння необхідно передусім вирішити, що розглядати як незалежну змінну, а що як шукану функцію. Далі, скориставшись умовами задачі, потрібно скласти диференціальне рівняння, беручи до уваги геометричний зміст задачі або використовуючи закони природознавства чи характер змін, які відбуваються із системою. Це перший – творчий етап роботи. На другому етапі слід розв'язати складене диференціальне рівняння і проаналізувати отриманий розв'язок залежно від початкових умов задачі.

Важлива пізнавальна функція моделювання – бути імпульсом, джерелом нових теорій. Нерідко трапляється, що теорія спочатку виникає у вигляді моделі, що дає наближене, спрощене пояснення явища, і виступає як первинна робоча гіпотеза, яка може перерости в «передтеорію» - попередницю розвиненої теорії. Більше того, у процесі моделювання виникають нові ідеї і форми експерименту, має місце відкриття раніше невідомих фактів. Моделювання - не тільки один із засобів відображення явищ і процесів реального світу, а й об'єктивний практичний критерій перевірки істинності наших знань, здійснюваної безпосередньо або за допомогою визначення їх ставлення до іншої теорії, яка виступає як модель, адекватність якої вважають практично обґрунтованою. Оскільки моделювання застосовують в органічній єдності з іншими методами пізнання, то воно, природно, виступає як процес поглиблення пізнання, його руху від відносно бідних на інформацію моделей до моделей більш змістовних, повніше розкриває сутність досліджуваних явищ дійсності.

Математичне моделювання в екології спільнот - досить велика галузь дослідження і за вибором об'єктів моделювання, і за набором методів, і за

обсягом вирішуваних проблем. Математичні методи застосовують також в описі динаміки біологічних систем. Біологічні змінні можуть бути функціями таких змінних, як температура, кількість їжі, довжина світлового дня або частота захворювань. Існує два класи методів: моделювання за допомогою диференціальних рівнянь і методи, що ґрунтуються на екстремальних принципах біології. Так, диференціальні рівняння дозволяють описувати динаміку процесів у режимі реального часу, тоді як варіаційні методи, як правило, передбачають лише кінцевий стаціонарний стан співтовариства.

Означеними моделями описують поведінку системи під час перехідного періоду від одного стану до іншого. Для аналізу цієї категорії моделей вивчають:

- структуру сигналів на вході і виході системи;
- реакцію системи на особливі перевіірочні сигнали;
- внутрішню структуру системи.

Останній пункт реалізують аналітичним моделюванням, в основі якого лежать диференціальні рівняння, що описують причинно-наслідкові зв'язки в екосистемі. Першим етапом аналітичного моделювання є формування концепції моделі і складання рівнянь, що описують поведінку системи, при цьому відбувається спрощення реальності, яке, однак, не впливає на найбільш суттєві властивості реальної системи. Потім здійснюють параметризацію, тобто визначення кількісних значень параметрів. Виконання цього завдання можливе трьома способами. Це:

- отримання попередніх оцінок значень параметрів на основі спостережень;
- знаходження комбінацій параметрів, що відповідають моделюванню ситуації, які ґрунтуються на методах оптимізації параметрів;
- оцінка ролі параметрів моделі за допомогою аналізу чутливості, який визначає реакцію моделі на зміну значень параметрів і рівень правильності оцінених параметрів.

Наступний крок аналітичного моделювання - імітація, тобто отримання розв'язку модельних рівнянь за фіксованих значень параметрів і початкових умов. І нарешті, випробування моделі або, іншими словами, порівняння її вихідних параметрів з вихідними даними системи. Розрізняють два способи випробування:

- перевірка (якісне або кількісне порівняння даних, отриманих у результаті моделювання, з дійсними значеннями);
- перевірка значимості моделі (проведення експериментів для вивчення поведінки моделі і системи для виявлення їх схожості, а також для порівняння тенденцій поведінки моделі і системи).

Для розкриття даної теми за основу взято теорію диференціальних рівнянь і деякі задачі природознавства, які розв'язують за допомогою диференціальних рівнянь.

Отже, диференціальні рівняння застосовують у різних галузях природознавства та прикладних дисциплін, а саме: у фізиці і механіці, хімії і біології, описі гармонічних коливань та деформації тіл, побудові різних моделей бойових дій та поширення епідемій, розрахунку точності маятникових, водяних та циклоїдальних годинників, дослідженні росту клітин з плином часу та руйнування клітин у звуковому полі, швидкості скорочення м'язів та швидкості розпаду лікарської речовини, моделі міжвидової конкуренції та моделі кооперації видів, а також під час розв'язання багатьох задач у гуманітарній сфері – демографічних, соціологічних, економічних, у медицині, фармакології, спорті, у разі дослідження ефективності реклами та у виборчих технологіях.

1. Процес радіоактивного розпаду

Процес радіоактивного розпаду визначають таким законом (якщо немає умов для виникнення ланцюгової реакції): швидкість розпаду, тобто y' , пропорційна наявній кількості радіоактивної речовини, яка не розпалася.

Маса m радіоактивної речовини з плином часу зменшується із-за розпаду, або математичною мовою:

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad k > 0,$$

де $y(t)$ – кількість речовини, яка не розпалася в момент часу t ; k – стала розпаду, яка залежить від властивостей речовини; знак мінус показує, що число $y(t)$ зменшується ($y(t)$ – число атомів, які не розпалися).

Інтегруючи, за $y(t_0)=y_0$, маємо

$$y=y_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Однією із важливих фізичних характеристик процесу радіоактивного розпаду є період напіврозпаду T – проміжок часу, за який кількість речовини, що розпалася, зменшиться вдвічі:

$$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kT}, \text{ звідси } T = \frac{1}{k} \ln 2.$$

Розглянемо практичне застосування наведених теоретичних міркувань.

Задача 1

Знайти закон розпаду радію, якщо відома його початкова кількість і період напіврозпаду T . Який відсоток радію розпадеться через 100 років, якщо $T=1600$ років?

Розв'язання

Нехай $R(t)$ – кількість радію в момент часу t , тоді $R(0)=R_0$. Швидкість розпаду дорівнює $\frac{dR}{dt}$. Вона від'ємна, тому що кількість радію зменшується. За умовою задачі

$$\frac{dR}{dt} = -kR, \quad k > 0.$$

Звідси

$$R=Ce^{-kt}, \quad R(0)=R_0=Ce^{-0 \cdot k}.$$

Отже, $C=R_0$ і $R(T) = \frac{R_0}{2} = R_0 e^{-kT}$. Тоді $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, звідси

$$-kT = -\ln 2 \text{ або } k = \frac{\ln 2}{T} = 0,00043.$$

А далі $R(t) = R_0 e^{-0,00043 \cdot t}$, враховуючи початкову умову, отримаємо такий розв'язок:

$$R(100) = R_0 e^{-0,00043 \cdot 100}; \quad \frac{R(100)}{R_0} = e^{-0,043} = 0,958 \text{ або } 95,8\%.$$

Таким чином, за 100 років розпадеться 4,2% початкового запасу радію.

Задача 2

За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радію. Через який час залишиться 1% від початкової кількості?

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість радію в момент часу t . Відомо, що швидкість радіоактивного розпаду пропорційна кількості речовини:

$$\frac{dx}{dt} = -k \cdot x, \quad k > 0; \quad \frac{dx}{x} = -k \cdot dt; \quad \ln x = -k \cdot t + \ln C; \quad x = C \cdot e^{-kt}.$$

Закон зміни кількості речовини з часом має вигляд

$$x(t) = x(0)e^{-kt}.$$

За умовою задачі за 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини, тобто $x(t) = 0,5x(0)$. Оскільки $t=30$ днів, то маємо співвідношення:

$$\frac{1}{2} x(0) = x(0) e^{-30k}; \quad \frac{1}{2} = e^{-30k}; \quad \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-30k}; \quad \ln 2 = 30k;$$

$$k = \frac{\ln 2}{30}; \quad \text{звідси } x(t) = x(0) \cdot e^{-\frac{\ln 2}{30} t} = x(0) \cdot 2^{\frac{-t}{30}}.$$

Отже, $x(t) = x(0) \cdot 2^{\frac{-t}{30}}$ – закон зміни кількості речовини з часом.

Знайдемо час, за який залишиться 1% речовини, підставляючи в рівняння $x(t) = 0,01x(0)$, отримаємо такі співвідношення:

$$0,01 \cdot x(0) = x(0) \cdot 2^{\frac{-t}{30}}; \quad 0,01 = 2^{\frac{-t}{30}}; \quad \lg 0,01 = -\frac{t}{30} \lg 2; \quad -2 = -\frac{t}{30} \lg 2.$$

Звідси $t = \frac{60}{\lg 2} \approx 200$ днів. Таким чином, приблизно через 200 днів залишиться 1% від початкової кількості.

Задача 3

Згідно з дослідями протягом року із кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

Розв'язання

Нехай у початковий момент часу кількість речовини $y(0)$ дорівнює R_0 .

Тоді через рік $y(1) = 0,99956R_0$, а за напівперіод розпаду $y(T) = \frac{R_0}{2}$.

Закон зміни кількості речовини з часом має такий вигляд:

$$y(t) = Ce^{-kt}, \quad y(0) = Ce^{-k0}, \quad C = R_0 \quad \text{або} \quad y(t) = R_0 e^{-kt}, \quad y(1) = R_0 e^{-k} = 0,99956R_0.$$

Звідси $e^{-k} = 0,99956$ або $k = -\ln 0,99956$.

$$\text{Таким чином, } y(t) = R_0 e^{t(\ln 0,99956)} \quad \text{або} \quad y(t) = R_0 (0,99956)^t,$$

$$y(T) = R_0 (0,99956)^T = \frac{R_0}{2}. \quad \text{Отже} \quad \frac{1}{2} = (0,99956)^T \quad \text{або} \quad \ln \frac{1}{2} = T \cdot \ln(0,99956).$$

Отримаємо, що напівперіод розпаду дорівнює $T = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,99956)} \approx 1600$ років.

Задача 4

Шматок гірської породи містить 100 мг урану і 14 мг уранового свинцю. Відомо, що уран розпадається наполовину за $4,5 \cdot 10^9$ років і що у випадку повного розпаду 238 г урану утворюється 206 г уранового свинцю. Визначіть вік гірської породи, зважаючи, що в момент утворення гірська порода не містила свинцю, та нехтуючи наявністю проміжних радіоактивних продуктів між ураном і свинцем.

Розв'язання

Нехай $y(t)$ – кількість радіоактивної речовини в момент часу t , тоді закон зміни кількості речовини з часом набуде вигляду:

$$y(t) = Ce^{-kt}.$$

Скориставшись значенням напівперіоду розпаду $T = 4,5 \cdot 10^9$, визначимо k :

$$y(T) = y(0) \cdot e^{-kt} = \frac{y_0}{2}, \quad -k \cdot T = \ln \frac{1}{2}, \quad k \cdot T = \ln 2, \quad k = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{4,5 \cdot 10^9}.$$

У даний момент часу $y(t)=100$, з іншого боку,

$$y(t) = y(0) \cdot e^{-\frac{t \cdot \ln 2}{4,5 \cdot 10^9}} = y(0) \cdot 2^{-\frac{t}{4,5 \cdot 10^9}},$$

де $y(0)=100+14 \cdot \frac{238}{206} = 116,2$ г. Таким чином, $100 = 116,2 \cdot 2^{-\frac{t}{4,5 \cdot 10^9}}$ або

$$1,162 = 2^{\frac{t}{4,5 \cdot 10^9}}; \quad \lg 1,162 = \frac{t}{4,5 \cdot 10^9} \cdot \lg 2.$$

Отже, вік гірської породи становить $t = 4,5 \cdot 10^9 \cdot \frac{\lg 1,162}{\lg 2} \approx 970 \cdot 10^6$ років.

Задача 5

За час Δt (Δt – дуже мала величина, виражена в частинах року) із кожного грама радію розпадається $0,00044\Delta t$ г і утворюється $0,00043\Delta t$ г радону. З кожного грама радону за час Δt розпадається $70\Delta t$ г. Коли кількість утвореного радону і радону, який ще не розпався, буде найбільшою, якщо на початку дослідів було x_0 г чистого радію?

Розв'язання

Визначимо спочатку кількість радію $x(t)$ в момент часу t . За час Δt із 1 г радію розпадається $0,00044\Delta t$ г, це означає, що із $x(t)$ г розпадається $0,00044\Delta t \cdot x(t)$ г. Таким чином, кількість радію в момент $t + \Delta t$ дорівнює

$$x(t + \Delta t) = x(t) - 0,00044\Delta t \cdot x(t),$$

звідси

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -0,00044 \cdot x(t).$$

У разі переходу до межі, коли $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо $\frac{dx}{dt} = -0,00044 \cdot x$;

$$\int \frac{dx}{x} = -\int 0,00044 dt; \quad \ln|x| = -0,00044t + \ln C; \quad x = Ce^{-0,00044t}.$$

За умовою задачі в початковий момент часу $x(0) = x_0$, тоді

$$x(0) = C \cdot 1 = x_0; \quad \Rightarrow \quad C = x_0; \quad x(t) = e^{-0,00044t}.$$

Нехай $y(t)$ – кількість радону в момент часу t . За час Δt із 1 г радію утвориться 0,00043 г радону, а з 1 г радону розпадеться $70\Delta t$ г. Це означає, що із $x(t)$ г радію утвориться $0,00043\Delta t \cdot x(t)$ г радону, із $y(t)$ г радону розпадеться $70\Delta t \cdot y(t)$ г. Таким чином, кількість радону в момент $t + \Delta t$ дорівнює

$$y(t + \Delta t) = y(t) + 0,00043 \cdot x(t) \cdot \Delta t - 70 \cdot \Delta t \cdot y(t),$$

звідси

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = 0,00043 \cdot x(t) - 70 \cdot y(t).$$

У разі переходу до межі, коли $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо:

$$y' = 0,00043 \cdot x - 70 \cdot y;$$

$$y' = 0,00043 \cdot x_0 e^{-0,00044t} - 70 \cdot y.$$

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = -70 \cdot y; \quad \int \frac{dy}{y} = - \int 70 dt; \quad \ln|y| = -70t + \ln C_1; \quad y = C_1 e^{-70t}.$$

Покладемо $C_1 = C_1(t)$ і підставимо у вихідне рівняння:

$$(C_1 e^{-70t})' = 0,00043 x_0 e^{-0,00044t} - 70 \cdot C_1 e^{-70t};$$

$$C_1' \cdot e^{-70t} = 0,00043 x_0 e^{-0,00044t}; \quad C_1' = 0,00043 x_0 e^{69,99956t};$$

$$C_1 = \frac{0,00043 \cdot x_0 \cdot e^{69,99956t}}{69,99956} + \overline{C}; \quad C_1 \approx 0,0000061 x_0 \cdot e^{69,99956t} + \overline{C},$$

звідси

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-70t} = 0,0000061 x_0 e^{-0,00044t} + \overline{C} \cdot e^{-70t}.$$

За змістом задачі $y(0) = 0$, тоді

$$y(0) = 0,0000061 \cdot x_0 \cdot 1 + \overline{C} \cdot 1 = 0; \quad C = 0,0000061 \cdot x_0.$$

Знайдемо екстремум даної функції:

$$y' = 0,0000061 \cdot x_0 \cdot (-0,00044 \cdot e^{-0,00044t} + 70 \cdot e^{-70t}) = 0;$$

$$-0,00044 \cdot e^{-0,00044t} + 70 \cdot e^{-70t} = 0; \quad 70 \cdot e^{-70t} = 0,00044 \cdot e^{-0,00044t};$$

$$e^{70,00044t} = \frac{70}{0,00044} \approx 1590909; \quad 70,00044 \cdot t = \ln 1590909 \approx 11,977.$$

Звідси $t \approx 0,171$ (років). Отже, кількість утвореного радону і радону, який ще не розпався, буде максимальною через 0,171 років або $0,171 \cdot 365 \approx 62$ дні.

2. Хімічні реакції

Швидкість хімічної реакції пропорційна добутку мас, які реагують.

Нехай x – кількість речовини X , у яку переходить речовина A (a – початкова кількість речовини A). Тоді швидкість реакції пропорційна кількості речовини, що не прореагувала, тобто

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x),$$

k – коефіцієнт пропорційності ($k > 0$).

Далі, нехай у речовину X переходять речовини A і B . Швидкість реакції пропорційна добутку мас, які реагують:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \quad (b - \text{початкова кількість речовини } B).$$

Швидкість розчинення твердої речовини в рідині пропорційна:

- різниці між концентрацією розчину в даний момент і концентрацією насиченого розчину;
- кількості нерозчиненої речовини.

Розглянемо практичне застосування наведених теоретичних міркувань.

Задача 6

Знайти залежність між кількістю розчиненої речовини і часом. Покласти, що за постійної температури швидкість розчинення твердого тіла у рідині пропорційна кількості цієї ж речовини, яка ще може розчинитися у рідині до насичення останньої.

Розв'язання

Нехай P – кількість речовини, що дає насичений розчин, і x – кількість речовини, яка вже розчинилася. Тоді

$$\frac{dx}{dt} = k(P-x),$$

де k – коефіцієнт пропорційності (відомий з дослідів), а t – час.

Розв'язуючи рівняння, отримаємо наступне:

$$\frac{dx}{(P-x)} = kdt ; \ln(x-P) = -kt + \ln C ; x = P + Ce^{-kt} .$$

У початковий момент $t=0$, $x=0$, тому $C = -P$, звідси $x(t) = P(1 - e^{-kt})$.

Останнє співвідношення описує залежність між кількістю розчиненої речовини і часом.

Задача 7

У результаті хімічної реакції між речовинами A і B утворюється речовина C . Установіть залежність кількості речовини C від часу, якщо до моменту вступу в реакцію кількість речовини A дорівнювала a , а речовини B дорівнювала b .

Розв'язання

Нехай $x = x(t)$ - кількість речовини C через час t після початку реакції, $\frac{dx}{dt}$ - швидкість утворення речовини C . За умовою задачі

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) , k > 0 ,$$

де k - коефіцієнт пропорційності. Розділяючи змінні, маємо наступний вираз

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt \text{ або } \frac{dx}{x-a} - \frac{dx}{x-b} = -k(b-a)dt .$$

Проінтегрувавши, отримаємо співвідношення

$$\frac{x-a}{x-b} = Ce^{-k(b-a)t} .$$

Із умови, що $x(0)=0$, знаходимо $C = \frac{a}{b}$, тобто $\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}e^{-k(b-a)t}$.

Розв'язавши останнє рівняння відносно x , знаходимо шукану залежність:

$$x(t) = ab \frac{1 - e^{-k(b-a)t}}{b - ae^{-k(b-a)t}} .$$

За $t \rightarrow \infty$ у випадку $b > a$ маємо $x(t) \rightarrow a$; для $b < a$ маємо $x(t) \rightarrow b$.

Для $a=b$ рівняння реакції матиме вигляд $\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2$. Звідси $\frac{1}{a-x} = kt + C$.

З умови, що $x(0)=0$, знайдемо $C = \frac{1}{a}$ і отримаємо залежність

$$x = a - \frac{a}{1+akt} = a \left(1 - \frac{1}{1+akt} \right).$$

Таким чином, кількість речовини $x(t) \rightarrow a$ у випадку $t \rightarrow \infty$.

3. Біологічні задачі

Далі розглянемо моделі, які застосовують в описі динаміки біологічних систем. Біологічні змінні можуть бути функціями таких змінних, як температура, кількість їжі, довжина світлового дня або частота захворювань. Обмежимося розглядом чисельності популяції деякого виду в заданому середовищі як функції часу.

У дискретних моделях біологічні змінні (зазвичай чисельність або розмір популяції) вимірюють в дискретні моменти часу. У відповідних безперервних моделях біологічна змінна є безперервна функція часу. Під час опису біологічних систем доцільні обидва підходи. Безперервні моделі більше підходять для опису росту дуже великих популяцій, таких, наприклад, як популяції бактерій. Навпаки, популяції рідкісних видів, наприклад американського журавля, краще описувати дискретними моделями, що відповідають щоденним, щомісячним або щорічним переписам.

У безперервних моделях $x(t)$ являє собою чисельність (розмір) популяції деякого виду в даному середовищі, як функцію часу. Вихідній, або початковий, популяції відповідає $x(t)$, і відмінності популяції в часі описують функцією $x(t)$.

Розглянемо декілька класів біологічних задач.

Закон розмноження визначають за результатами експериментів: швидкість розмноження пропорційна кількості суб'єктів (бактерії, особи, пари та ін.). Таким чином, математичну модель динаміки популяцій можна описати рівнянням

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad k > 0,$$

при цьому k можна також зобразити як $k=m-n$, де m – коефіцієнт відносної швидкості народжуваності, а n – коефіцієнт відносної швидкості вмирання.

Задача про мирне співіснування («хижак-жертва»)

На заселеному острові живуть 2 племені. N_1 і N_2 – кількість людей у першому і у другому племенах відповідно. Перше плем'я – мисливці, друге – людожери.

1. Якщо би жили тільки представники першого племені, то їх кількість змінювалася б за наступним законом

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1, \quad \varepsilon_1 > 0$$

(тобто зростала пропорційно числу людей цієї категорії).

2. У випадку якщо би жило тільки друге плем'я, то кількість його членів зменшувалася б за законом

$$\frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2, \quad \varepsilon_2 > 0$$

(тобто плем'я вимирало би від голоду).

3. Зважаючи на те, що вони живуть разом, то ε_1 зменшиться пропорційно числу жителів N_2 , а ε_2 збільшиться пропорційно N_1 , тобто отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = -(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) N_2 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо шукану кількість людей першого і другого племені відповідно

$$N_1 = N_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2),$$

$$N_2 = N_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2).$$

Додаткові умови встановлюються з експериментальних даних.

Розв'язок цієї задачі має коливальний характер, оскільки розміри популяцій хижаків і жертв поперемінно, але не одночасно, то спадають, то зростають.

Коливальні криві характерні для багатьох біологічних процесів. Складні добові, місячні і річні біологічні ритми багатьох рослин і тварин являють собою приклади природних коливань. Іншими прикладами можуть виступати явища, пов'язані з нервовою системою і її розладами. Можна виділити три різні типи коливань:

- розмах або амплітуда коливань спадає або зростає з часом;
- амплітуда є стала, але змінюється частота коливань;
- і амплітуда, і частота змінюються з часом, кожна за власним законом.

Гармонійний осцилятор

Рівняння $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ являє собою рівняння простого гармонійного руху, який часто виникає в біологічних задачах, що належать до періодичних або коливальних явищ і процесів. Тут ω - дійсна позитивна стала. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. У даному випадку $\alpha = 0$ і $\beta = \omega$. Загальний розв'язок має вигляд

$$x(t) = k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t.$$

Якщо відомі $x(0)$ і $x'(0)$ то можна знайти k_1 і k_2 . Оскільки

$$x(0) = k_1, \quad x'(0) = k_2 \omega,$$

то розв'язок можна записати у вигляді

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + [x'(0)/\omega] \sin \omega t.$$

Цей розв'язок відповідає періодичному руху з періодом $2\pi/\omega$.

Модель сезонного зростання

Диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) \cos t,$$

де t - позитивна стала, можна розглядати як просту модель сезонного зростання. Швидкість зростання $\frac{dx}{dt}$ популяції $x(t)$ стає поперемінно то позитивною, то негативною, і популяція то зростає, то зменшується. Причиною того є сезонний фактор, наприклад доступність їжі. Щоб розв'язати рівняння, відокремимо змінні і виконаємо інтегрування.

Загальний розв'язок рівняння запишемо у вигляді $x(t) = ce^{rsint}$. Вважаючи $t = 0$, отримаємо $c = x(0)$, тобто розмір популяції в момент t дорівнюватиме $x(t) = x(0)e^{rsint}$. Максимальний розмір популяції, що дорівнює $e^r x(0)$, досягається за $t = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, \dots$, коли $\sin t = 1$. Мінімальний розмір, дорівнюваний $e^{-r} x(0)$, досягається за $t = 3\pi/2, 7\pi/2, 11\pi/2, \dots$, коли $\sin t = -1$.

У цій моделі розмір популяції коливається від $e^r x(0)$ до $e^{-r} x(0)$ з періодом 2π . Моменти часу $t = 0, 2\pi, 4\pi$ можна вважати центрами сезонів найбільшої доступності їжі (літніх сезонів), а моменти $t = \pi, 3\pi, 5\pi$ відповідають серединам сезонів найбільшої нестачі їжі (зимових сезонів). Тривалість одного року відповідає 2π одиниці часу.

До цього класу задач відносять також модель епідемії, задачу міжвидової (аналогічно економічної) конкуренції та ін.

Модель епідемії

Спільнота з n індивідуумів піддається впливу рідкого інфекційного захворювання. У будь-який момент часу t співтовариство підрозділяється на $x(t)$ сприйнятливих, $y(t)$ таких, що заражаються та контактують з іншими, і $z(t)$ ізольованих, померлих або таких, що володіють імунітетом, індивідуумів. Нехай спочатку $y(t)$ і $z(t)$ малі в порівнянні з $x(t)$. Модель поширення цього захворювання описують такою системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta x(0)y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x(0)y - \gamma y \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y \end{cases},$$

де β і γ – позитивні сталі, що відображають швидкості, з якими відповідно сприйнятливі індивідууми заражаються і заражені ізолюються, вмирають або набувають імунітету. Початкові умови трьох груп $x(0), y(0), z(0)$ пов'язані співвідношенням

$$z(0) = n - x(0) - y(0).$$

Нескладно показати, що за умови $\beta x(0) < \gamma$ захворювання не призводять до епідемії. Випадок, коли $\beta x(0) > \gamma$, дослідити самостійно.

Модель міжвидової конкуренції

Лінійну систему можна розглядати як просту модель взаємодії видів, якщо $x(t)$ і $y(t)$ відповідають чисельності кожного з двох видів, присутніх в даному середовищі, в момент часу t . Якщо обидва види конкурують за загальні ресурси, то в моделі це можна враховувати з допомогою негативних коефіцієнтів a_{12} і a_{21} . Якщо, наприклад, коефіцієнт a_{12} негативний, то швидкість зростання популяції першого виду буде спадати в міру росту популяції другого. Можливі типи взаємодії видів можна проілюструвати такою моделлю.

Однорідна лінійна система

$$x'(t) = 2x(t) - y(t)$$

$$y'(t) = x(t) - 2y(t)$$

описує взаємний вплив популяції двох конкуруючих видів на швидкості їх зростання. Припустимо, що початкові популяції налічують $x(0)=100$ і $y(0)=200$ осіб. Потрібно знайти чисельності обох видів в будь-який наступний момент часу. Диференціюючи перше рівняння, отримуємо

$$x''(t) = 2x'(t) - y'(t),$$

У друге рівняння системи підставляємо $y(t)$ з першого рівняння:

$$y'(t) = -x(t) + 2y(t) = -x(t) + 2[2x(t) - x'(t)]$$

Таким чином, $x(t)$ задовольняє наступне рівняння другого порядку:

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$x(t) = k_1 e^{3t} + k_2 e^t,$$

де k_1 і k_2 – сталі. З першого рівняння системи отримуємо

$$y(t) = 2x(t) - x'(t) = -k_1 e^{3t} + k_2 e^t.$$

Початкові популяції складають відповідно $x(0) = 100$, $y(0) = 200$.

Це означає, що $k_1 + k_2 = 100$ і $-k_1 + k_2 = 200$, тобто $k_1 = -50$ і $k_2 = 150$.

Шуканим розв'язком системи є пара функцій

$$x(t) = 150e^t - 50e^{3t} \quad \text{і} \quad y(t) = 150e^t - 50e^{3t}.$$

Вимирання першого виду відбувається, коли $150e^t - 50e^{3t} = 0$, тобто коли $e^{2t} = 3$. Це має місце за $t = (1/2)\log_e 3 \approx 0,552$ од. часу. За 0,552 од. часу другий вид продовжує зростати відповідно до рівняння $y' = 2y(t)$.

Його загальний розв'язок є

$$y(t) = y(t_0)e^{2(t-t_0)}.$$

Якщо $t_0 = (1/2)\log_e 3$ і $y(t_0) = 150e^{t_0} + 50e^{3t_0}$ відбувається зростання популяції другого виду після вимирання першого.

Внутрішнє харчування глюкозою

Влив глюкози в кровоносну систему є важлива лікувальна процедура. Для вивчення цього процесу визначимо $G(t)$ як кількість глюкози в крові пацієнта в момент часу t . Припустимо, що глюкоза вводиться в кров з постійною швидкістю. У той же час глюкоза розкладається і видаляється з кровоносної системи зі швидкістю, пропорційною наявній кількості глюкози.

Таким чином, функція $G(t)$ задовольняє диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dG}{dt} = c - aG,$$

де a – позитивна стала. Отримали неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Щоб розв'язати це рівняння, запишемо його у вигляді

$$dG/dt + aG = c.$$

Застосовуючи метод інтегруючого множника, помноживши обидві частини рівняння на e^{at} , отримаємо рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dt}(e^{at}G(t)) = ce^{at}$$

Інтегруючи, отримуємо загальний розв'язок

$$e^{at}G(t) = k + (c/a)e^{at},$$

де k – стала інтегрування. Остаточний загальний розв'язок має вигляд

$$G(t) = ke^{-at} + c/a.$$

Сталу k можна виразити через початкову кількість глюкози в крові $G(0)$. Маємо $G(0) = k + c/a$. Отже, загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$G(t) = \frac{c}{a} + \left[G(0) - \frac{c}{a} \right] e^{-at}.$$

Зі збільшенням часу $G(t)$ наближається до межі, що дорівнює c/a . Це і є рівноважна кількість глюкози в крові.

Модель кооперації видів

Припустимо, що два види перебувають у стосунках симбіозу, тобто популяція кожного виду зростає пропорційно чисельності іншого, а зменшення популяцій кожного виду будемо вважати пропорційним своїй чисельності. Моделлю такої поведінки популяцій може служити лінійна система

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + 4y(t), \\ y'(t) &= x(t) - 2y(t). \end{aligned}$$

Потрібно знайти чисельності видів в усі наступні моменти часу, якщо початкові популяції налічують $x(0) = 100$ і $y(0) = 300$ осіб. Шляхом диференціювання і виключення $y(t)$ знаходимо, що

$$x''(t) + 4x'(t) = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 4\lambda = 0$ є $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 = -4$. Загальний розв'язок має такий вигляд:

$$\begin{aligned} x(t) &= k_1 e^{0t} + k_2 e^{-4t} = k_1 + k_2 e^{-4t}, \\ y(t) &= \left(\frac{1}{4} \right) [x'(t) + 2x(t)] = \left(\frac{k_1}{2} \right) - \left(\frac{k_2}{2} \right) e^{-4t}. \end{aligned}$$

Застосовуючи початкові умови, отримуємо співвідношення

$$x(0) = k_1 + k_2 = 100 \quad \text{і} \quad y(0) = (k_1/2) - (k_2/2) = 300,$$

звідси $k_1 = 350$, $k_2 = -250$.

Шуканим розв'язком системи є пара функцій

$$\begin{cases} x(t) = 350 - 250e^{-4t}, \\ y(t) = 175 + 125e^{-4t}. \end{cases}$$

Популяція першого виду зростає від першопочаткового розміру в 100 осіб до межового розміру 350. Кількість другого виду спадає від першопочаткового

розміру в 300 осіб до межового розміру 175. Межові розміри відповідають рівноважним популяціям двох видів, які можуть підтримувати одне одного в даному середовищі.

Логістичне зростання

Швидкість росту популяції у розрахунку на одну особу являє собою різницю між середньою народжуваністю і середньою смертністю. Будемо вважати, що середня народжуваність виражається позитивною сталою, що не залежить від часу t і розміру популяції $x(t)$. Припустимо також, що середня смертність пропорційна розміру популяції і дорівнює $\delta x(t)$, де δ – позитивна стала. Збільшення смертності із зростанням популяції може відбуватися через ефекти скупченості або підсилення конкуренції за доступні харчові ресурси. Для даної моделі рівняння, якому підпорядковується зростання популяції, має вигляд

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \beta - \delta x \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dt} = x(\beta - \delta x).$$

Відокремлюючи змінні, отримуємо такий вираз:

$$\int \frac{1}{x(\beta - \delta x)} dx = \int dt.$$

Зауважимо, що підінтегральну функцію можна розкласти на елементарні дроби

$$\frac{1}{x(\beta - \delta x)} = \frac{1}{\beta x} + \frac{\delta}{\beta(\beta - \delta x)},$$

інтегруючи, отримаємо наступний вираз:

$$\frac{1}{\beta} \int \frac{1}{x} dx + \frac{\delta}{\beta} \int \frac{1}{\beta - \delta x} dx = \int dt,$$

звідси

$$\frac{1}{\beta} \log_e x + \frac{\delta}{\beta} \left(-\frac{1}{\delta} \right) \log_e (\beta - \delta x) = t + c.$$

Таким чином, маємо загальний інтеграл

$$\frac{1}{\beta} [\log_e x - \log_e (\beta - \delta x)] = \frac{1}{\beta} \log_e \frac{x}{\beta - \delta x} = t + c.$$

Якщо $x(0)$ є розмір початкової популяції, то

$$\frac{1}{\beta} \log \left[\frac{x(0)}{\beta - \delta x(0)} \right] = c$$

Тоді для визначення $x(t)$ маємо співвідношення

$$\log_e \frac{x(t)}{\beta - \delta x(t)} - \log_e \frac{x(0)}{\beta - \delta x(0)} = \beta t$$

або

$$\log_e \frac{x(t)(\beta - \delta x(0))}{x(0)(\beta - \delta x(t))} = \beta t$$

Переходячи до експоненти, отримаємо

$$\frac{x(t)(\beta - \delta x(0))}{x(0)(\beta - \delta x(t))} = e^{\beta t}.$$

Остаточно, розв'язуючи рівняння відносно $x(t)$, отримаємо розв'язок у вигляді

$$x(t) = \frac{x(0)\beta e^{\beta t}}{\beta - \delta x(0) + \delta x(0)e^{\beta t}}$$

Процес зростання, описуваний такою функцією, називають *логістичним ростом*, а рівняння $dx/dt = x(\beta - \delta x)$ – *логістичним*. За логістичного зростання популяція зі збільшенням часу наближається до межового (рівновесного) розміру. Рівноважної популяції відповідає розмір, дорівнюваний

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(0)\beta e^{\beta t}}{\beta - \delta x(0) + \delta x(0)e^{\beta t}}.$$

Помноживши чисельник і знаменник $x(t)$ на величину e^{-t} , отримаємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(0)\beta}{\beta e^{-\beta t} - \delta x(0)e^{-\beta t} + \delta x(0)} = \frac{x(0)\beta}{x(0)\delta} = \frac{\beta}{\delta},$$

оскільки $e^{-\beta t} \rightarrow 0$ у випадку $t \rightarrow \infty$. Відповідно до цієї формули розмір рівноважної популяції прямо пропорційний середній народжуваності і обернено пропорційний середній смертності на одну особу популяції.

Розглянемо практичне застосування наведених вище теоретичних міркувань.

Задача 8

У сприятливих для розмноження умовах перебуває деяка кількість N_0 бактерій. З експерименту відомо, що швидкість розмноження пропорційна їх кількості. Знайдіть залежність зростання з часом кількості бактерій.

Розв'язання

$N(t)$ – кількість бактерій, що розмножуються в момент часу t , $N(0) = N_0$.
Процес визначимо згідно з умовами за законом зростання:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t).$$

Коефіцієнт k залежить від виду бактерій і умов, в яких вони перебувають, і його визначимо експериментально. Розв'язуючи останнє рівняння отримаємо, що чисельність бактерій зростає за показниковим законом (експоненціально):

$$N(t) = Ce^{kt} \text{ або } N(t) = N_0e^{kt}.$$

Таким чином, залежність зростання визначено.

Задача 9

Популяція бактерій збільшується таким чином, що шукана швидкість росту в момент часу t становить величину $1/(1 + 2t)$. Припустимо, що в початковій популяції розмір дорівнює $x(0)=1000$. Якою буде популяція після 4 годин та після 12 годин росту, якщо в початковий момент часу розмір популяції дорівнює $x(0)=1000$?

Розв'язання

Шукана швидкість росту дорівнює

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + 2t}.$$

Це однорідне лінійне рівняння першого порядку. Інтегруючи його, отримаємо вираз

$$\log_e x(t) = \frac{1}{2} \log_e(1 + 2t) + k,$$

де k - стала інтегрування. Переходячи до експоненти отримаємо наступне співвідношення:

$$x(t) = e^k e^{(1/2)\log_e(1+2t)} = e^k (1 + 2t)^{1/2}.$$

Таким чином, за $c = e^k$ загальний розв'язок рівняння набуває вигляду

$$x(t) = c(1 + 2t)^{1/2}.$$

Оскільки $x(0)=1000$, то $1000=c$, і остаточно шуканий розв'язок має вигляд

$$x(t) = 1000(1 + 2t)^{1/2}.$$

Розмір популяції після 4 год зростання можна виразити співвідношенням

$$x(4) = 1000(1 + 8)^{1/2} = 3000.$$

Через 12 год популяція зростає до $x(12) = 1000 \cdot 25^{1/2} = 5000$.

Таким чином, задачу розв'язано.

Задача 10

У ставку співіснують карасі і щуки, $x(t)$ - чисельність виду-хижака, $y(t)$ - чисельність виду-жертви в момент t . Визначити чисельності популяції в усі наступні моменти часу, якщо початкові популяції складають $x(0)=y(0)=1000$ осіб. Коли настане вимирання виду-жертви?

Розв'язання

Швидкість росту $y'(t)$ популяції жертв зменшується в міру збільшення популяції хижаків $x(t)$, а швидкість росту $x'(t)$ популяції жертв збільшується, якщо кількість популяції хижаків $y(t)$ спадає, тобто закон співіснування визначимо такою системою:

$$x'(t) = x(t) + y(t),$$

$$y'(t) = -x(t) + y(t).$$

Методом виключення перейдемо від системи до рівняння другого порядку:

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

має два комплексні корені: $\lambda_1 = 1 + i$ та $\lambda_2 = 1 - i$.

Загальний розв'язок набуває такого вигляду:

$$x(t) = k_1 e^t \cos t + k_2 e^t \sin t.$$

З першого рівняння системи випливає, що

$$y(t) = x'(t) - x(t) = k_2 e^t \cos t - k_1 e^t \sin t.$$

З початкових умов $x(0) = y(0) = 100$ визначимо значення сталих $k_1 = 1000$ і $k_2 = 1000$. Шуканий розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = 1000 e^t (\cos t + \sin t),$$

$$y(t) = 1000 e^t (\cos t - \sin t).$$

Популяція жертв вимирає, коли $\cos t - \sin t = 0$, тобто після $t = \pi/4$. Популяція хижаків продовжує рости за рахунок інших ресурсів середовища і описується рівнянням $x'(t) = x(t)$. Часто, однак, трапляється, що припущення, зроблені під час побудови моделі взаємодії видів, втрачають справедливість після зникнення одного з видів. У даному випадку розвиток двох популяцій може тривати до зникнення виду жертв. □ Задачу розв'язано.

Задача 11

Популяція $x(t)$ одного виду рідкісних тварин збільшується за логістичним законом з коефіцієнтами $\beta = 0,1$ і $\delta = 0,001$. У початковий момент часу $x(0) = 10$. Чому дорівнює рівноважний розмір популяції $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$?

Розв'язання

Швидкість зростання задовольняє таке логістичне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = x(0,1 - 0,001x).$$

Отже розв'язок, що задовольняє умові $x(0) = 10$, має вигляд

$$x(t) = \frac{e^{0,1t}}{0,1 - 0,01 + 0,01e^{0,1t}} = \frac{e^{0,1t}}{0,09 + 0,01e^{0,1t}}.$$

У разі $t \rightarrow \infty$ популяція наближається до рівноважного розміру $\beta/\delta = 100$. За такого розміру популяції народжуваність повністю компенсує смертність.

4. Процеси нагрівання (охолодження)

Швидкість охолодження (нагрівання) тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища.

Нехай температура тіла в момент часу t дорівнює $y(t)$, а температура навколишнього середовища – T . Тоді за нескінченно малий проміжок часу dt кількість тепла, яку тіло отримуємо або віддає, дорівнює

$$dQ = -k(y - T)dt,$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Інакше кажучи, кількість тепла, отриманого (відданого) тілом, від температури $y(t)$ до T дорівнює

$$Q = mc(y - T), \text{ звідси } dQ = mcdy.$$

Тобто приходимо до рівняння, що описує процес нагрівання (охолодження):

$$mcdy = -k(y - T)dt \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dt} = -k_1(y - T).$$

Задача 12

За 10 хв тіло охоллоло від 100° до 60° . Температура навколишнього середовища постійна і дорівнює 20° . Через який проміжок часу тіло охолоне до 25° ?

Розв'язання

Нехай $y = y(t)$ – температура тіла через t хв від початку охолодження.

Швидкість охолодження дорівнює $-\frac{dy}{dt}$. За умовою $-\frac{dy}{dt} = k(y - 20)$, де k – поки невідомий коефіцієнт пропорційності.

$$\frac{dy}{y - 20} = -kdt, \ln|y - 20| = -kt + \ln C, \quad y = 20 + Ce^{-kt}.$$

Сталі C і k визначаємо із початкових умов: $y(0) = 100 = 20 + Ce^{-k \cdot 0}$, тобто $C = 80$.

$$y(10) = 60 = 20 + 80e^{-kt}, \quad \frac{1}{2} = e^{-10k}, \quad \ln 2 = 10k, \quad k = \frac{\ln 2}{10}, \quad y(t) = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}},$$

$$y(t) = 25^\circ = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}, \quad \frac{5}{80} = 2^{-\frac{t}{10}}, \quad \frac{1}{16} = 2^{-\frac{t}{10}}, \quad \frac{t}{10} = 4, \quad t = 40 \text{ хв.}$$

Отже, тіло охолоне до 25° через 40 хв.

Задача 13

Шматок металу, температура якого a градусів, помістили в піч. Температура печі протягом години рівномірно підвищується від a градусів до b градусів. За різниці температур печі і металу в T градусів метал нагрівається зі швидкістю kT за хвилину. Знайти температуру металу через годину.

Розв'язання

Нехай $Q(t)$ – температура печі в момент часу t . Тоді температура злитка $\Phi(t)$ дорівнюватиме різниці $\Phi = Q - T$. Із умови задачі $Q(t) = Ct + D$, де C і D визначаються із умов $Q(0) = a$, $Q(60) = b$, вони дорівнюватимуть відповідно $C = \frac{b-a}{60}$, $D = a$.

Диференціальне рівняння задачі має вигляд $\frac{d\Phi}{dt} = kT$. Оскільки

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Q - T) = \frac{d}{dt}(Ct + D - T) = C - \frac{dT}{dt},$$

то рівняння після нескладних перетворень набуде вигляду

$$C - \frac{dT}{dt} = kT \quad \text{або} \quad \frac{dT}{dt} + kT - C = 0.$$

Загальний інтеграл матиме вигляд

$$\frac{1}{k} \ln(kT - C) + t = \frac{1}{k} \ln C_1 \quad \text{або} \quad kT - C = C_1 e^{-kt}.$$

Із умови $T(0) = 0$ випливає, що $C_1 = -C$ і відповідно $T = \frac{C}{k}(1 - e^{-kt})$. Отже,

$$Q - \Phi = Ct + D - \Phi.$$

Звідси

$$\Phi = Ct + D - \frac{C}{k}(1 - e^{-kt}) \quad \text{або} \quad \Phi = a - \frac{b-a}{60k}(1 - e^{-kt} - kt).$$

Таким чином, через годину шматок металу матиме таку температуру:

$$\Phi(60) = a - \frac{b-a}{60k}(1 - e^{-60k} - 60k) = b - \frac{b-a}{60k}(1 - e^{-60k}).$$

Задача 14

У посудину, що містить 1 кг води температури 20° , опускаємо алюмінієвий предмет масою 0,5 кг, питомою теплоємністю 0,2 і температурою 75° . Через хвилину вода нагрілася на 2° . Через який проміжок часу температура води і предмета будуть відрізнятися на 1° ? Втратами тепла на нагрівання посудини та іншими можна знехтувати.

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – температура води, $y(t)$ – температура алюмінієвого предмета в момент часу t . Під час нагрівання води від 20° до $x(t)$ за час t поглинається тепло, кількість якого дорівнює

$$Q_1 = mc(x(t) - 20) = 1 \cdot 1 \cdot (x(t) - 20) = x(t) - 20,$$

де m – маса, c – питома теплоємність (для води $c=1$).

Аналогічно під час охолодження предмета від 75° до $y(t)$ за той же час t втрачається тепло, кількість якого дорівнює

$$Q_2 = 0,5 \cdot 0,2 \cdot (y(t) - 75) = 0,1 \cdot (y(t) - 75).$$

За умовою систему можна вважати замкнутою (тобто взаємодією з зовнішнім світом можна знехтувати), отже, $Q_2 = -Q_1$,

$$x - 20 = -0,1(y - 75), \quad 10x - 200 = 75 - y$$

$$10x + y = 275, \quad y - x = 275 - 11x.$$

За умовою швидкість нагрівання води $x'(t)$ пропорційна різниці температур води і предмета:

$$x' = a(y - x), \text{ де } a - \text{деяка константа.}$$

Звідси $x' = a(275 - 11x)$ або $x' + 11ax = 275a$. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння

$$x' + 11ax = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dt} = -11ax.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, маємо співвідношення

$$\int \frac{dx}{x} = -\int 11a dt; \quad \ln|x| = -11at + \ln C_1.$$

Звідси $x(t) = C_1 e^{-11at}$. Розв'яжемо рівняння методом варіації сталої.

Підставимо $x(t)$ у вихідне рівняння, вважаючи, що $C_1 = C_1(t)$, тоді

$$C_1' \cdot e^{-11at} = 275a; \quad C_1(t) = 275a \int e^{11at} dt = 25e^{11at} + C;$$

$$x(t) = (275e^{11at} + C)e^{-11at} = 25 + C e^{-11at}.$$

За умовою $x(0)=20$ і $x(1)=20+2=22$. Застосовуючи правило для $x(t)$, визначимо C і a :

$$x(0) = 25 + C = 20; \quad C = -5; \quad x(1) = 25 - 5e^{11a} = 22;$$

$$5e^{-11a} = 3; \quad e^{-11a} = \frac{3}{5}; \quad x(t) = 25 - 5(e^{-11a})^t = 25 - 5\left(\frac{3}{5}\right)^t.$$

Знайдемо різницю температур води і предмета в момент часу t :

$$y(t) - x(t) = 275 - 11x(t) = 275 - 11\left(25 - 5\left(\frac{3}{5}\right)^t\right), \quad y(t) - x(t) = 55 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t.$$

Тепер визначимо час, коли різниця температур дорівнюватиме 1° :

$$55\left(\frac{3}{5}\right)^t = 1 \quad \text{або} \quad \ln\left(55\left(\frac{3}{5}\right)^t\right) = 0, \quad \ln 55 + t \cdot \ln \frac{3}{5} = 0,$$

$$\text{звідси } t = -\frac{\ln 55}{\ln \frac{3}{5}} = \frac{\ln 55}{\ln 5 - \ln 3} \approx 8 \text{ хв.}$$

5. Задачі оптики

У випадках відсутності фізичних законів, за допомогою яких можна було б побудувати математичну модель у вигляді диференціального рівняння, вдаються до звичних математичних (у данному випадку – геометричних) міркувань.

Задача 15

Визначити поверхню обертання, з якої треба відшліфувати дзеркало рефлектора, щоб усі промені, що виходять із джерела світла, розташованого в точці на осі обертання, відбивалися у дзеркалі паралельно цій осі.

Розв'язання

Перетнемо поверхню дзеркала площиною, що проходить через вісь. Точку O візьмемо за початок прямокутної системи координат, розташованої в

цій площині, а вісь OY направимо по осі обертання. Знайдемо рівняння кривої γ , отриманої під час перетину шуканої поверхні із зазначеною площиною.

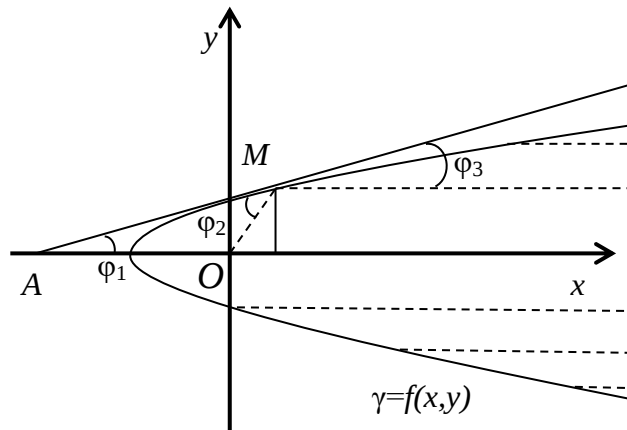


Рис.1

Нехай AM – дотична до кривої γ у точці (x, y) . Оскільки кут падіння дорівнює куту відбиття, то $\varphi_2 = \varphi_3$, отже трикутник AOM – рівнобедрений і $AO = OM$.

Рівняння дотичної AM має вигляд $Y - y = y'(X - x)$, де X, Y – поточні координати дотичної, а $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої. За $X = 0$ маємо $Y = y - xy' < 0$. Тоді $AO = -Y = xy' - y$. Оскільки $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, то крива γ задовольняє таке диференціальне рівняння $\sqrt{x^2 + y^2} = xy' - y$, загальним розв'язком якого є функція $y = \frac{x^2 - C^2}{2C}$.

Таким чином отримаємо, що крива γ – парабола, а поверхня дзеркала є параболоїд $y = \frac{x^2 + z^2 - C^2}{2C}$, утворений обертанням кривої γ навколо її осі.

Задача 16

Поглинання світлового потоку тонким шаром води пропорційне товщині шару і потоку, що падає на його поверхню. У випадку проходження через шар товщиною 1 м поглинається $1/4$ початкового світлового потоку. Яка частина потоку досягне глибини $h = 4$?

Розв'язання

Нехай $Q(h)$ – світловий потік, що падає на поверхню на глибині h . Під час проходження через шар води завтовшки dh поглинений світловий потік дорівнює

$$dQ = -kQdh,$$

звідси $Q(h) = Ce^{-kh}$. З умови задачі $Q(0) = Q_0$, відтак $C = Q_0$, а $Q(1) = \frac{3}{4}Q_0$,

отже, $e^{-k} = \frac{3}{4}$. Тоді $Q(h) = \left(\frac{3}{4}\right)^h \cdot Q_0$. Таким чином, глибини $h=4$ досягне

світловий потік $Q(4) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot Q_0 \approx 0,316 \cdot Q_0$.

6. Задачі для розв'язання, які спираються на другий закон Ньютона

У задачах на рух, вільне падіння тіл, у коливальних та інших процесах під час побудови диференціального рівняння застосовують другий закон Ньютона, за невідому функцію, як правило, обирають швидкість.

Задача 17

Човен уповільнює свій рух під дією опору води, яка пропорційна швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, через 4 с швидкість її дорівнюватиме 1 м/с. За яких умов швидкість зменшиться до 1 см/с? Яку відстань може пройти човен до зупинки?

Розв'язання

Нехай швидкість човна $v(t)$. Початкова швидкість човна $v(0)=1,5$. На підставі другого закону Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F(t) = -kv(t), k > 0,$$

тобто $\frac{dv}{dt} = -\frac{k \cdot v(t)}{m}$, $v(t) = Ce^{-\frac{k \cdot t}{m}}$.

Ураховуючи, що $v(0)=C=1,5$, маємо $v(t) = \frac{3}{2}e^{-\frac{k \cdot t}{m}}$.

Оскільки $v(4) = \frac{3}{2}e^{-\frac{4k}{m}}$, $-\frac{k}{m} = \frac{\ln 3}{4}$, то $v(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}$. Знайдемо час, протягом якого швидкість зменшиться до 0,01 м/с:

$$0,01 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t^*}{4}-1}; \quad t^* = 4\left(\frac{2}{\lg 1,5} + 1\right) \approx 50 \text{ с.}$$

Довжину шляху, що його пройшов човен до зупинки, визначимо із співвідношення $\frac{ds}{dt} = v$, тобто

$$s = \int_0^t v(x) dx = \int_0^t \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{4}-1} dx = \frac{6}{\lg 1,5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}}\right).$$

Таким чином, човен може подолати відстань до зупинки не більше $\frac{6}{\lg 1,5} \approx 15 \text{ м.}$

Задача 18

Матеріальна точка здійснює рух по осі OX . Нехай OX – вісь із щільністю, яка постійно збільшується (чим далі, тим рухатися важче). Знайдіть закон руху матеріальної точки.

Розв'язання

Закон руху такий:

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0, \quad x(t_0) = x_0.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, маємо співвідношення

$$\ln|x| = -kt + \ln c \quad \text{або} \quad x = Ce^{-kt}.$$

Сталу C визначимо з умови $x(t_0) = x_0$:

$$c = \frac{x_0}{e^{-kt_0}} \quad \text{або} \quad x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Остання рівність визначає закон руху матеріальної точки.

Задача 19

Вивести рівняння руху тіла, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 , нехтуючи силами опору.

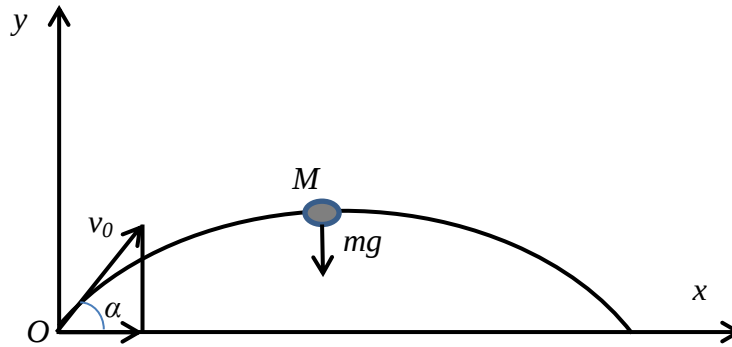


Рис.2

Розв'язання

Оберемо осі координат так, як показано на рисунку. У довільному положенні M на тіло масою m діє лише одна сила – його вага $P=mg$. Тому відповідно до другого закону Ньютона диференціальне рівняння руху в проекціях на осі x і y запишемо у вигляді

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg.$$

Скорочуючи на m , отримаємо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Початкові умови руху тіла при $t=0$ такі:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha.$$

Інтегруючи рівняння з урахуванням початкових умов, доходимо висновку, що рівняння руху тіла задають через формули

$$\frac{dx}{dt} = C_1, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + C_2.$$

Проінтегрувавши останні рівняння, отримаємо рівняння траєкторії польоту тіла, кинутого під кутом до обрію з заданою швидкістю, яке має вигляд

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - gt^2/2.$$

Спираючись на ці рівняння, можна зробити ряд висновків про характер руху кинутого тіла. Наприклад, можна відповісти на питання про час польоту

тіла до його падіння на землю, відстань польоту по горизонталі, максимальну висоту тіла, що летить, траєкторію польоту тіла тощо.

Задача 20

Вивести закон руху точки P масою m по горизонтальній прямій L під дією сили F , що притягає її до точки O на тій же прямій і є пропорційна відстані PO .

Розв'язання

Фізично силу F можна реалізувати будь-яким опором, зокрема пружиною.

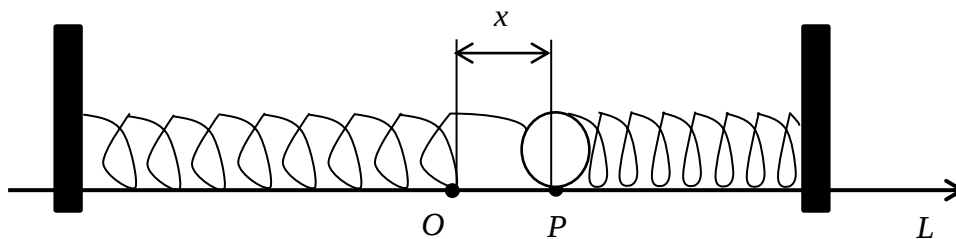


Рис.3

Уведемо на прямій L координати, обравши за початок точку O . Змінну координату точки P позначимо $x=x(t)$. У силу другого закону Ньютона рівняння руху точки P має вигляд

$$m\ddot{x} = F = -kx \quad \text{або} \quad m\ddot{x} + kx = 0.$$

Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Розв'язком цього рівняння є функція

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t$$

або у більш загальному вигляді –

$$x(t) = C \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \alpha \right).$$

Останнє рівняння можна трактувати під кутом зору фізики, де частоту коливань визначають масою m і пружністю k і вона не залежить від початкових умов. А проте від початкового положення точки x_0 та її швидкості $\dot{x}_0$ залежать амплітуда коливань C і початкова фаза α .

Задача 21

Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0=400$ м/с, пробиває стіну товщиною $h=20$ см і вилітає з неї зі швидкістю $v_1 = 100$ м/с. Вважаючи силу опору стіни пропорційною квадрату швидкості руху кулі, знайти час T руху кулі в стіні.

Розв'язання

Згідно з другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху кулі має вигляд

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2,$$

де m – маса кулі; $v=v(t)$ – змінна швидкість, яка залежить від часу t ; знак мінус означає, що сила опору стіни спрямована в бік, протилежний напрямку швидкості. Отже, отримуємо рівняння

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2 \quad \text{або} \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt,$$

звідси

$$-\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t - C \quad \text{або} \quad \frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + C.$$

Оскільки $v(0) = v_0$, то $C = \frac{1}{v_0}$ і $\frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}$ або $v = \frac{v_0}{\frac{k}{m}tv_0 + 1}$.

Якщо покласти в останній формулі $v=v_1$, то $t=T$, відтак T визначимо із рівняння

$$\frac{1}{v_1} = \frac{k}{m}T + \frac{1}{v_0} \quad \text{або} \quad T = \frac{m}{k} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right);$$

$\frac{k}{m}$ визначимо з наступних рівнянь:

$$v = \frac{v_0}{\frac{k}{m}tv_0 + 1}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{v_0}{\frac{k}{m}tv_0 + 1} \quad \text{або} \quad S = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{k}{m}tv_0 + 1 \right) + C_1.$$

За умовою задачі $S(0)=0$ (куля входить в стіну) і $S(t)=h$ (куля виходить із стіни). Звідси $C_1 = 0$, $\frac{m}{k} = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v_1}}$. Отже, $T = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v_1}} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right)$ і $T \approx 0,00108$ с.

Задача 22

Вантаж спускають з парашутом, що має форму півсфери радіусом $R=4$ м. Його маса разом з масою парашута дорівнює 82 кг. Знайти швидкість v через 2 с після початку спуску і відстань, пройдену за час t .

Вважати, що сила опору повітря $F_1 = 0,00081 \cdot S \cdot v^2$, де S – площа найбільшого перетину, перпендикулярного напрямку руху.

Розв'язання

У диференціальному рівнянні руху парашута

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

сила F є рівнодіюча двох протилежно напрямлених сил: ваги, яка дорівнює mg , і сили опору повітря, що дорівнює $0,00081 \cdot S v^2$. Тому диференціальне рівняння руху має вигляд

$$m \frac{dv}{dt} = mg - 0,00081 \cdot S v^2 \quad \text{або} \quad \frac{dv}{dt} = g - av^2, \text{ де } a = \frac{0,00081 \cdot S}{m}.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, отримаємо наступний вираз

$$\int \frac{dv}{g - av^2} = t + C \quad \text{або} \quad \frac{1}{2\sqrt{g \cdot a}} \ln \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{a}}{\sqrt{g} - v\sqrt{a}} = t + C.$$

Якщо $t = 0$, то $v = 0$. Отже, $C = 0$. Таким чином, маємо відношення

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g \cdot a}} \ln \frac{\sqrt{g} + v\sqrt{a}}{\sqrt{g} - v\sqrt{a}}$$

Змінюючи v на $\frac{ds}{dt}$ і інтегруючи отримане співвідношення, одержимо вирази

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}} \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{g \cdot a})}{\operatorname{ch}(t\sqrt{g \cdot a})}, \quad S = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(t\sqrt{g \cdot a})) + C.$$

Оскільки $t=0$ і $S=0$, то $C=0$, а отже,

$$S = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{ch}(t\sqrt{g \cdot a})).$$

Отримані формули описують зміну швидкості руху вантажу і пройдені відстані за час t .

Задача 23

Метеорит, перебуваючи під впливом земного тяжіння, зі стану спокою починає прямолінійно падати на Землю з висоти h . Якою була б швидкість метеорита під час досягнення ним поверхні Землі за умови відсутності земної атмосфери? Радіус Землі $R = 6377$ км.

Розв'язання

Нехай $x=x(t)$ – відстань, пройдена метеоритом з початку падіння; відстань від метеорита до центра Землі в момент часу t дорівнює $(h-x)$. У момент t на метеорит діє сила $F=m\cdot\alpha$, де m – маса метеорита, α – його прискорення. На поверхні Землі на тіло діє сила тяжіння $P = m\cdot g$, де g – прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

Згідно з законом Ньютона ці сили обернено пропорційні квадратам відстаней тіла, що падає, від центру Землі:

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2} \quad \text{або} \quad \frac{m\cdot\alpha}{m\cdot g} = \frac{R^2}{(h-x)^2}.$$

Звідси $\alpha = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$ або $\frac{dv}{dt} = \frac{R^2 g}{(h-x)^2}$ Враховуючи, що $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$, отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = \frac{R^2 g}{(h-x)^2} \quad \text{або} \quad \frac{dv^2}{dx} = \frac{2g R^2}{(h-x)^2}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо співвідношення для швидкості

$$v^2 = \frac{2R^2 g}{(h-x)} + C.$$

Оскільки рух почався із стану спокою, тобто $x=0$ і $v=0$ при $t=0$, то

$$0 = \frac{2R^2 g}{(h-0)} + C, \quad C = -\frac{2R^2 g}{h}.$$

Тому змінення швидкості метеорита залежно від пройденої відстані можна зобразити як $v^2 = \frac{2R \cdot g \cdot x}{h(h-x)}$, а на поверхні Землі, тобто за $x=h-R$, швидкість метеорита являє собою функцію $v = \sqrt{2R \cdot g \cdot \left(1 - \frac{R}{h}\right)}$.

Оскільки h за умовою необмежено велике, то, переходячи до межі за $h \rightarrow \infty$, отримаємо $v = \sqrt{2g \cdot R}$.

У момент досягнення Землі швидкість метеориту становить $v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6377000} \approx 11,2$ км/с.

7. Витікання рідини з посудини

Швидкість витікання рідини з посудини крізь малий отвір, розташований на відстані h нижче рівня рідини, з урахуванням тертя визначають законом

$$v = \mu \sqrt{2g \cdot h},$$

де g – прискорення сили тяжіння ($g \approx 10$ м/с²); μ – коефіцієнт витрати рідини, тобто кількість рідини, що витікає крізь малий отвір площею перерізу S за одиницю часу. Для води $\mu=0,62$, для гасу $\mu=0,6$.

Нехай маємо посудину, площа поперечного перерізу якої є функція від висоти $S=S(h)$, наповнена рідиною до рівня H . У дні посудини є отвір, через який витікає рідина, площа цього отвору δ . Функція $V(h)$ визначає швидкість зміни об'єму рідини в посудині. Визначимо закон, за яким змінюється рівень рідини залежно від часу. Для цього припустимо, що в момент часу t висота рідини в посудині дорівнює h . За час dt витікає рідина, об'єм якої дорівнює $dv=\delta V(h)dt$. З іншого боку, рівень рідини зменшиться на dh , і об'єм відповідно стане $dv= -S(h)dh$ (знак мінус ставимо тому, що $dh<0$). Прирівнюючи ці два співвідношення, отримаємо диференціальне рівняння

$$\delta V(h)dt = -S(h)dh; \quad t = -\frac{1}{\delta} \int_H^h \frac{S(h)}{V(h)} dh.$$

Якщо з посудини витече вся рідина, тоді $h=0$, тому час, за який посудина стане порожньою, визначаємо зі співвідношення

$$T = \frac{1}{\delta} \int_0^H \frac{S(h)}{V(h)} dh.$$

Якщо витікання відбувається через малий отвір, то на підставі закону Торрічеллі $V = \mu \sqrt{2g \cdot h}$, де g – прискорення сили тяжіння, а μ – емпіричний коефіцієнт витрат.

Задача 24

Знайти час T за який рідина, що заповнює конічну воронку висотою H і кутом при вершині 2α , витече через малий отвір σ , вирізаний у вершині конуса.

Розв'язання

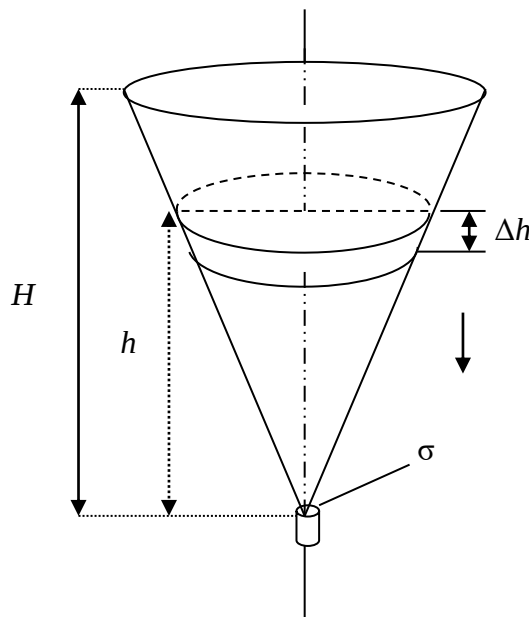


Рис.4

Обчислимо об'єм рідини ΔV , що витікає через отвір у дні воронки за проміжок часу Δt . Він дорівнюватиме об'єму циліндра з площею основи σ і висотою $v \cdot \Delta t$, тобто $\Delta V = \sigma \cdot k \sqrt{2g \cdot h} \cdot \Delta t$. За цей проміжок часу Δt рівень рідини у воронці зменшиться на Δh . Обчислимо об'єм рідини ΔV між рівнями h і $h + \Delta h$ ($\Delta h < 0$). Він дорівнюватиме об'єму зрізаного конуса. Заміюючи останній циліндром з тією ж висотою Δh і основою, яка дорівнює верхній основі конуса, отримаємо наступний вираз

$$\Delta V = \pi \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \Delta h.$$

Тоді

$$\pi \cdot h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \Delta h = - \sigma \cdot k \sqrt{2g \cdot h} \cdot \Delta t,$$

звідси

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = - \mu \cdot h^{-3/2}, \quad \mu = \frac{\sigma \cdot k \sqrt{2g}}{\pi \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Переходячи до межі за $\Delta t \rightarrow 0$, маємо рівняння

$$\frac{dh}{dt} = -\mu h^{-3/2}.$$

Таким чином, задача зводиться до розв'язання рівняння з початковою умовою $h(0)=H$. Тепер потрібно знайти час $t=T$, коли $h=0$. Інтегруючи, одержимо вираз

$$\frac{2}{5}h^{5/2} = -\mu t + C,$$

де $C = \frac{2}{5}H^{5/2}$, отже, $\frac{2}{5}h^{5/2} = -\mu t + \frac{2}{5}H^{5/2}$.

Поклавши $t=T$, маємо $0 = -\mu T + \frac{2}{5}H^{5/2}$, звідси $T = \frac{2}{5\mu}H^{5/2}$.

8. Задачі на концентрацію

Газ (рідина), що заповнює певний об'єм, унаслідок перемішування розподіляється по всьому об'єму рівномірно.

Задача 25

Посудина об'ємом 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину надходить 0,1 л азоту в секунду, який безперервно перемішується, і така ж кількість змішаного витікає. Через який час у посудині буде 99% азоту?

Розв'язання

Нехай у момент часу t в посудині міститься x літрів азоту. Тоді концентрація азоту в посудині в момент часу t дорівнюватиме $\frac{x}{20}$. Кількість азоту на початку досліду $x(0)=20 \cdot 0,8=16$.

Розглянемо зміну $y(t)$ за малий проміжок часу $[t; t+\Delta t]$. За час Δt кількість азоту в посудині збільшилась на Δx л. З іншого боку, за Δt витекло $0,1 \cdot \Delta t$ л. За той же час витекла така ж кількість суміші, в якій містилось $0,1 \cdot \Delta t \cdot \frac{x}{20}$ л азоту.

Це означає, що в посудині додалось $0,1 \cdot \Delta t - 0,1 \cdot \Delta t \cdot \frac{x}{20}$ л азоту, тобто

$$\Delta x = 0,1 \cdot \Delta t - 0,1 \cdot \Delta t \cdot \frac{x}{20} \quad \text{або} \quad 200 \cdot \Delta x = 20 \cdot \Delta t - x \cdot \Delta t.$$

Розділивши обидві частини на Δt і перейшовши до межі за $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо диференціальне рівняння, яке описує даний процес:

$$200 \frac{dx}{dt} = 20 - x \quad \text{або} \quad \frac{dx}{20 - x} = \frac{dt}{200},$$

$$\ln(x - 20) = -\frac{1}{200}t + \ln C, \quad |x - 20| = Ce^{-t/200}, \quad x = 20 + Ce^{-t/200},$$

$C > 0$ за змістом задачі.

За умовою задачі $x(0)=16$, тоді $16=20+Ce^0$, звідси $C=-4$.

Оскільки 99% азоту складає $\frac{99 \cdot 20}{100} = 19,8$ і $x(t)=20-4e^{-t/200}$, тоді

$$19,8 = 20 - 4e^{-t/200} \quad \text{або} \quad -0,2 = -4e^{-t/200}.$$

Звідси

$$e^{-t/200} = \frac{1}{20} \quad \text{або} \quad -\frac{t}{200} = -\ln 20,$$

отже, шуканий час доорівнює $t = 200 \ln 20 \approx 10$ хв.

9. Адіабатичний стиск повітря

Адіабатичний (тобто без обміну тепла з навколишнім середовищем) процес характеризується рівнянням Пуассона

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^k,$$

де v_0 – початковий об’єм газу; p_0 – початковий тиск; k – стала стиску для даного газу; V, p – поточні значення об’єму і тиску.

Задача 26

Циліндричну посудину об’ємом V_0 наповнили атмосферним повітрям, яке адіабатично стискається до об’єму V_1 . Обчислити роботу стиску.

Розв’язання

Нехай V і p відповідно об’єм і тиск газу в той момент, коли поршень знаходиться на висоті h , а S – площа поршня. Тоді при опусканні поршня на висоту dh об’єм газу зменшиться на величину $dV=S \cdot dh$. Таким чином буде виконано роботу

$$dW = -p \cdot S \cdot dh \quad \text{або} \quad dW = -p \cdot dV.$$

Враховуючи, що

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k \quad \text{і} \quad p = \frac{p_0 V_0^k}{V^k},$$

маємо рівняння $dW = -\frac{p_0 V_0^k}{V^k} \cdot dV$, проінтегрувавши яке, одержимо наступний вираз

$$W = -p_0 V_0^k \int \frac{dV}{V^k} = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1)V^{k-1}} + C, \quad k \neq 1.$$

Із початкової умови $W(V_0)=0$ знаходимо значення сталої

$$C = -\frac{p_0 V_0}{k-1}.$$

Таким чином,

$$W = \frac{p_0 V_0}{k-1} \left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1} - 1 \right],$$

За умови $V=V_1$ матимемо шукане значення роботи стиску

$$W = \frac{p_0 V_0}{k-1} \left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1 \right].$$

10. Задачі, пов'язані з тепловими потоками

Кількість теплоти q , яка проходить через площу S , що перпендикулярна напрямку теплового потоку, пропорційна площі S і швидкості зміни температури T за час x , визначається як

$$q = -k \cdot S \cdot \frac{dT}{dx},$$

де k – коефіцієнт теплопровідності.

Задача 27

Порожня залізна куля перебуває в стаціонарному тепловому стані (тобто у стані, за якого температура в різних точках тіла різна, але в кожній окремій точці з часом не змінюється).

Внутрішній радіус кулі 6 см, зовнішній – 10 см, температура внутрішньої поверхні 200° , зовнішньої – 20° . Знайти температуру в точках розміщених на відстані 9 см від центру кулі.

Розв'язання

У даному випадку, згідно із симетрією, теплота поширюється радіально, тому температура в кожній точці є функція її відстані від центру кулі. Площа майданчика, через яку проходить теплота – це площа поверхні кулі радіуса r , тобто $S=4\pi \cdot r^2$, тому

$$q = -4\pi \cdot k \cdot r^2 \cdot \frac{dT}{dr}.$$

А втім кількість теплоти, що проходить через дві довільні концентричні сферичні поверхні, одна і та ж, тому

$$-4\pi \cdot k \cdot r^2 \cdot \frac{dT}{dr} = q = \text{const.}$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, отримаємо розв'язок рівняння

$$4\pi \cdot k \cdot T = \frac{q}{r} + C.$$

Із умови, що $T(6)=200$, $T(10)=20$, знаходимо вирази для q і C

$$q=10800\pi \cdot k, \quad C=-1000 \pi \cdot k.$$

Тоді $T = T(r) = \frac{2700}{r} - 250$, отже температура в точках, що знаходяться на відстані 9 см від центру кулі, дорівнює $T(9)=300 - 250=50^{\circ}$.

Задача 28

Циліндрична котушка виготовлена з мідного дроту. Під час проходження через котушку електричного струму виділяється тепло. Вивести формулу для температури встановленого режиму, як функції від часу t .

Розв'язання

Нехай T_0 – температура середовища, в якому розміщена котушка, $T(0)=T_0$, c – питома теплоємність міді, γ – її густина, V – об'єм, S – площа

поверхні котушки, q – кількість тепла, що виділяється протягом одиниці часу, k – коефіцієнт теплопровідності.

Кількість тепла, яке виділяється за час Δt , дорівнює $q \cdot \Delta t$. Ця величина складається з двох частин: тепла, що витрачається на підвищення температури ΔT , і тепла, що потрапляє в середовище, яке оточує котушку. Перша частина дорівнює $C \cdot V \cdot \gamma \cdot \Delta T$, друга – $k \cdot S \cdot (T - T_0) \cdot \Delta t$, звідси

$$q = C \cdot V \cdot \gamma \cdot \frac{dT}{dt} + k \cdot S \cdot (T - T_0) \quad \text{або} \quad \frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_0) + \beta,$$

де $\alpha = \frac{k \cdot S}{C \cdot V \cdot \gamma}$, $\beta = \frac{q}{C \cdot V \cdot \gamma}$.

Розділяючи змінні та інтегруючи, отримаємо розв'язок рівняння у вигляді

$$t + C = -\frac{1}{\alpha} \ln \left| T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

Оскільки $T(0) = T_0$, то $C = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\beta}{\alpha}$, тому

$$t - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \ln \left| T - T_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

Звідси $T = T_0 + \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$ або $T = T_0 + \frac{q}{k \cdot S} \left(1 - e^{-\frac{k \cdot S \cdot t}{C \cdot V \cdot \gamma}} \right)$.

Таким чином, формулу для температури точок кулі виведено.

11. Реактивний рух

Для руху тіл зі змінною масою другий закон Ньютона непридатний, оскільки він поширюється тільки на тіла з постійною масою. У цьому випадку застосовують рівняння Мещерського

$$m \frac{dv}{dt} + (v - u) \frac{dm}{dt} = F,$$

де F – рівнодіюча всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла (точки) змінної маси;

m – маса матеріальної точки в момент часу t ;

v – абсолютна швидкість точки;

u – швидкість частинок, які приєдналися.

У разі $\frac{dm}{dt} > 0$ маса точки збільшується (частинки приєднуються);

якщо $\frac{dm}{dt} < 0$ – зменшується (частинки відокремлюються);

якщо $\frac{dm}{dt} = 0$, то маса точки постійна і з рівняння Мещерського маємо другий закон Ньютона.

Рівняння Мещерського можна також записати у вигляді

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + u \cdot \frac{dm}{dt}.$$

Якщо ввести вектор відносної швидкості частинок, що приєднуються, $u + v = u_0$, тоді рівняння набуде вигляду

$$m \frac{dv}{dt} = F + u_0 \cdot \frac{dm}{dt}.$$

За $u_0 = 0$ отримуємо другий закон Ньютона. Величину $R = u_0 \cdot \frac{dm}{dt}$ називають реактивною силою.

Рівняння Мещерського в позначеннях можна записати так:

$$m \frac{dv}{dt} = F + R.$$

Точка змінної маси може рухатися з прискоренням навіть за відсутності зовнішніх сил $F = 0$. Величина реактивної сили $|R| = \left| \frac{dm}{dt} \right| |u_0|$ пропорційна зміні маси в одиницю часу $\left| \frac{dm}{dt} \right|$ («секундної маси») і швидкості частинок, що відокремлюються або приєднуються.

Задача 29

Ракета з початковою масою M_0 рухається вертикально вгору під дією сили віддачі від витікання газів. Маса M ракети змінюється залежно від часу t за законом $M = f(t)$ (закон згоряння палива). Швидкість витікання газів постійна (щодо ракети), спрямована вниз і дорівнює u_0 . Знайти висоту підйому ракети як функцію часу, якщо початкова швидкість ракети на поверхні Землі дорівнює v_0 .

Опір повітря і зміну прискорення сили тяжіння залежно від висоти підйому ракети не враховувати (задача Ціолковського про рух ракети з урахуванням сили тяжіння).

Розв'язання

Визначимо систему координат. Нехай вісь OY спрямована вгору, тоді реактивну силу можна виразити як

$$u_0 \cdot \frac{dm}{dt} = -u_0 f'(t),$$

а силу тяжіння як $F = -g \cdot f(t)$. Відтак рівняння Мещерського набуде вигляду

$$f(t) \cdot \frac{dv}{dt} = -u_0 f'(t) - g f(t),$$

$$dv = -\left(g + u_0 \frac{f'(t)}{f(t)}\right) dt \text{ або } v = -g \cdot t - u_0 \cdot \ln(f(t)) + C.$$

Враховуючи, що $f(0) = M_0$, а $v(0) = v_0$, отримаємо вирази

$$C = V_0 + u_0 \cdot \ln M_0, \quad v(t) = -g \cdot t - u_0 \cdot \ln(f(t)) + v_0 + u_0 \cdot \ln M_0.$$

Але оскільки $v(t) = \frac{dy}{dt}$, то

$$dy = \left(-g \cdot t + u_0 \cdot \ln \frac{M_0}{f(t)} + v_0\right) dt, \quad y = -\frac{g \cdot t^2}{2} + u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{f(t)} dt + v_0 \cdot t + C_1.$$

Зважаючи, що $y(0) = 0$, то $C_1 = 0$, а відтак отримаємо висоту підйому ракети як функцію часу t у вигляді

$$y(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} + u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{f(t)} dt + v_0 \cdot t,$$

що й потрібно було показати.

Задача 30

Маса ракети з повним запасом палива дорівнює M , без палива – m , швидкість витікання продуктів горіння з ракети дорівнює c , початкова швидкість ракети дорівнює нулю. Знайти швидкість ракети після згорання палива, нехтуючи силою тяжіння і опором повітря (формула Ціолковського).

Розв'язання

Позначимо через $v(x)$ швидкість ракети після згоряння палива масою x . У цей момент часу маса ракети становитиме $M - x$, а кількість руху (в проекції на вісь y) дорівнюватиме нулю.

$$Q_1 = m_1 \cdot v_1 = (M - x) \cdot v(x).$$

Далі, після згоряння палива масою Δx маса ракети дорівнюватиме $M - x - \Delta x$, швидкість відповідно $v(x + \Delta x)$, швидкість згорілої частини палива – $v(x + \Delta x) - c$, а кількість руху системи дорівнюватиме

$$Q_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (M - x - \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) + \Delta x \cdot (v(x + \Delta x) - c).$$

Оскільки за умовою дією зовнішніх сил можна знехтувати (сила тяжіння, опір повітря), то $Q_1 = Q_2$ і

$$(M - x) \cdot v(x) = (M - x - \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) + \Delta x \cdot (v(x + \Delta x) - c),$$

$$(M - x) \cdot v(x + \Delta x) - (M - x) \cdot v(x) = \Delta x \cdot c, \quad (M - x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = c.$$

Переходячи до межі, коли $\Delta x \rightarrow 0$, отримаємо рівняння

$$(M - x) v'(x) = c; \quad v' = \frac{c}{M - x}; \quad v(x) = \int \frac{c}{M - x} dx = -c \ln(M - x) + C_1.$$

У початковий момент часу за $x=0$, маємо $v(0)=0$. Звідси

$$v(0) = -c \cdot \ln M + C_1 = 0; \quad C_1 = c \cdot \ln M; \quad v(x) = -c \cdot \ln(M - x) + c \cdot \ln M;$$

$$v(x) = c \cdot (\ln M - \ln(M - x)) = c \cdot \ln \frac{M}{M - x}.$$

Оскільки $M - x > 0$, то $v(x) = c \cdot \ln \frac{M}{M - x}$. Таким чином, після згоряння всього палива за $x=M-m$ швидкість ракети буде дорівнювати

$$v(M - m) = c \cdot \ln \frac{M}{M - (M - m)} = c \cdot \ln \frac{M}{m}.$$

12. Геометричні задачі

Для того щоб розв'язати наведені нижче геометричні задачі, потрібно побудувати креслення, позначити шукану криву $y=y(x)$ (якщо задача в прямокутних координатах) і виразити всі величини через x , y , y' ,

скориставшись геометричним змістом похідної. Тоді задане в умові задачі співвідношення перетвориться на диференціальне рівняння, з якого можна знайти шукану функцію $y(x)$.

Задача 31

Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, удвічі меншу абсциси точки дотику.

Розв'язання

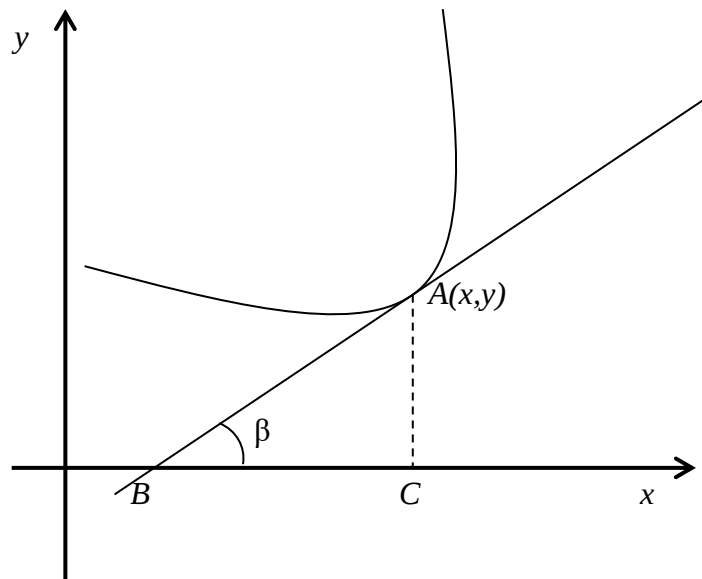


Рис.5

Нехай точка дотику на шуканій кривій $y=y(x)$ в декартовій системі XOY має координати (x, y) . Тоді рівняння дотичної до кривої $y=y(x)$ набуде вигляду $Y - y = k(X - x)$, оскільки $k = \operatorname{tg} \alpha = y'$, то $Y - y = y'(X - x)$. Визначимо абсцису точки перетину дотичної з віссю OX .

Припускаючи, що $Y=0$, отримаємо рівняння

$$-y = y'(X - x) \quad \text{або} \quad X = \frac{xy' - y}{y'}.$$

За умовою задачі $\frac{x}{2} = \frac{xy' - y}{y'}$. Отримаємо рівняння $xy' - 2y = 0$.

Звідси рівняння шуканої кривої має вигляд $y = Cx^2$.

Задача 32

Знайти криву, яка має таку властивість: довжина її дуги, укладеної між будь-якими двома її точками P і Q , пропорційна різниці відстаней до точок P і Q від нерухомої точки O .

Розв'язання

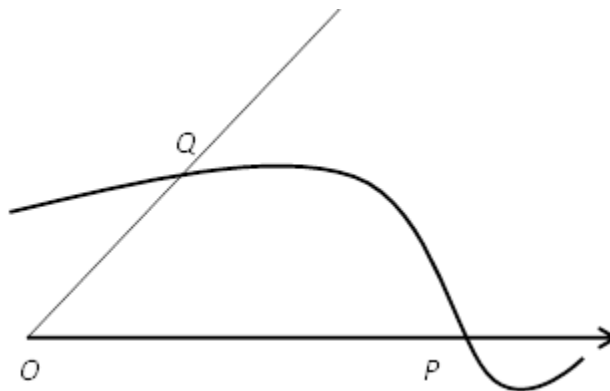


Рис.6

Якщо зафіксувати точку P , то дуга QP буде змінюватися пропорційно різниці OQ і сталій OP . Уведемо полярні координати, узявши точку O за полюс, а OP – за полярну вісь. Диференціал дуги кривої в полярних координатах $(ds)^2 = (dr)^2 + (r \cdot d\varphi)^2$.

Звідси $k^2 \cdot (dr)^2 = (dr)^2 + (r \cdot d\varphi)^2$ або $d\varphi = \sqrt{k^2 - 1} \cdot \frac{dr}{r} = \alpha \cdot \frac{dr}{r}$. Інтегруючи, отримаємо, що шукана крива є логарифмічна спіраль $r = Ce^{\alpha\varphi}$.

Задача 33

Знайти криву, яка проходить через початок координат і таку, що відрізок її нормалі, що відсікається сторонами першого координатного кута, має постійну довжину, що дорівнює 2.

Розв'язання

Нехай AB – нормаль, проведена до шуканої кривої $y=y(x)$ у точці $M(x,y)$. Рівняння цієї нормалі має вигляд

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

де X, Y – поточні координати точки нормалі.

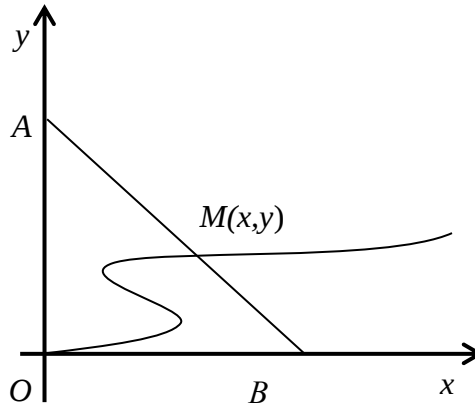


Рис.7

Ординату точки A і абсцису точки B визначаємо з рівнянь

$$-y = \frac{x}{y'}, \quad -y = -\frac{1}{y'},$$

тобто $A = \left(0; y + \frac{x}{y'}\right)$, $B(x + yy'; y)$.

За умовою задачі

$$\sqrt{(x + yy')^2 + \left(y + \frac{x}{y'}\right)^2} = 2; (x + yy')^2 + \left(y + \frac{1}{y'}\right)^2 = 4; (x + yy')^2 \left(1 + \frac{1}{y'^2}\right) = 4;$$

$$(x + yy')^2 = \frac{4y'^2}{1 + y'^2}; \quad x + yy' = \frac{2y'}{\pm \sqrt{1 + y'^2}}; \quad x = \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Останнє рівняння є нерозв'язне відносно похідної. Застосовуємо метод введення параметра:

$$y' = p; \quad y = p \, dx; \quad x = \frac{2p}{\sqrt{1 + p^2}} - yp; \quad dx = \frac{2\sqrt{1 + p^2} - 2p \frac{2p}{2\sqrt{1 + p^2}}}{1 + p^2} dp - p \, dy - y \, dp;$$

$$\frac{dy}{p} = \frac{2 + 2p^2 - 2p^2}{(\sqrt{1 + p^2})^3} dp - p \, dy - y \, dp; \quad \left(\frac{1}{p} + p\right) dy = \frac{2}{(\sqrt{1 + p^2})^3} - y \, dp;$$

$$\frac{1 + p^2}{p} dy = \frac{2}{(\sqrt{1 + p^2})^3} - y \, dp; \quad y' + \frac{p}{1 + p^2} y = \frac{2p}{(\sqrt{1 + p^2})^5}.$$

Отримане лінійне рівняння розв'язуємо методом Бернуллі:

$$y = uv; \quad y' = u'v + v'u; \quad u'v + v'u + \frac{u v p}{1 + p^2} = \frac{2p}{(\sqrt{1 + p^2})^5};$$

$$\begin{aligned}
v' &= -\frac{vp}{1+p^2}; & \frac{dv}{v} &= -\frac{p}{1+p^2} dp; & \ln v &= -0,5 \cdot \ln|1+p^2| \\
v &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}; & \frac{u'}{\sqrt{1+p^2}} &= \frac{2p}{(\sqrt{1+p^2})^5}; & u' &= \frac{2p}{(1+p^2)^2}; \\
du &= \frac{dp^2}{(1+p^2)^2}; & u &= -\frac{1}{1+p^2} + C; \\
y &= \left(-\frac{1}{1+p^2} + C\right) \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{-1+C+Cp^2}{(\sqrt{1+p^2})^3}; \\
x &= \frac{2p}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{(-1+C-Cp^2)}{(\sqrt{1+p^2})^3} p = \frac{2p+2p^3+p-Cp-Cp^3}{(\sqrt{1+p^2})^3} = \frac{3p+2p^3-Cp^3-Cp}{(\sqrt{1+p^2})^3}.
\end{aligned}$$

Довизначаємо сталу C з умови, що крива проходить через початок координат

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{-1+2+2p^2}{(\sqrt{1+p^2})^3}, \\ x &= \frac{3p+2p^3-2p^3-2p}{(\sqrt{1+p^2})^3}; \end{aligned} \right. & \Rightarrow & \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{1+2p^2}{(\sqrt{1+p^2})^3}, \\ x &= \frac{p}{(\sqrt{1+p^2})^3}; \end{aligned} \right. \\
\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{-1-1+p^2}{(\sqrt{1+p^2})^3}, \\ x &= \frac{3p+2p^3-p^3-p}{(\sqrt{1+p^2})^3}; \end{aligned} \right. & \Rightarrow & \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{p^2}{(\sqrt{1+p^2})^3}, \\ x &= \frac{2p+p^3}{(\sqrt{1+p^2})^3}; \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

і отримаємо рівняння шуканої кривої в параметричній формі.

Задача 34

Знайти рівняння кривої, будь-яка дотична до якої утворює з осями координат трикутник площею $2a^2$.

Розв'язання

Запишемо рівняння дотичної: $Y - y(x_0) = y'(x_0)(X - x_0)$. У нашому випадку $x_0 = x^*$, $(x^*; y^*)$ – координати точки дотику. В точці $(\bar{a}; 0)$ маємо рівняння

$$0 - y(x^*) = y'(x^*)(\bar{a} - x^*).$$

Звідси
$$\bar{a} = \frac{y'(x^*) x^* - y(x^*)}{y'(x^*)}.$$

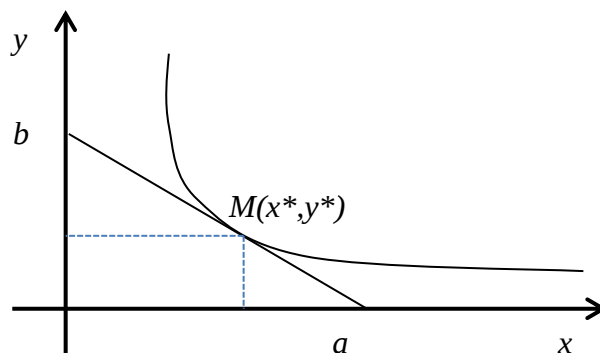


Рис.8

У точці $(0; \overline{b})$ отримаємо рівняння

$$\overline{b} - y(x^*) = y'(x^*)(0 - x^*); \quad \overline{b} = y'(x^*)(-x^*) + y(x^*);$$

$$y'(x^*) = y^* = y; \quad x^* = x; \quad y'(x^*) = y'.$$

Оскільки за умовою $S = \frac{1}{2} |\overline{a}| |\overline{b}| = 2a^2$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 4a^2$. Відтак

$$\frac{|y'x - y|}{y'} \cdot |(-y'x + y)| = 4a^2; \quad (y'x - y)^2 = 4a^2 y'; \quad y'x - y = \pm 2a\sqrt{y'}.$$

Отримавши рівняння Клеро, розв'яжемо його методом введення параметра:

$$y = y'x \pm 2a\sqrt{y'}; \quad y' = p; \quad dy = p dx; \quad y = px \pm 2a\sqrt{p}; \quad xdp \pm \frac{a}{\sqrt{p}} dp = 0;$$

$$dp \left(x \pm \frac{a}{\sqrt{p}} \right) = 0; \quad \sqrt{p} = \pm \frac{a}{x}; \quad y = \frac{a^2}{x^2} \cdot x \pm 2a \frac{a}{x} = \frac{a^2}{x} \pm \frac{2a^2}{x} = \pm \frac{a^2}{x}; \quad y = \pm \frac{a^2}{x}.$$

Таким чином, шуканою кривою є гіпербола $x \cdot y = \pm a^2$.

Задача 35

Знайти криві, у яких площа трикутника, обмеженого дотичною, віссю абсцис і відрізком від початку координат до точки дотику, є величина постійна і така, що дорівнює a^2 .

Розв'язання

Нехай $y(x)$ – рівняння кривої, що задовольняє умову задачі, (x_0, y_0) – її довільна точка.

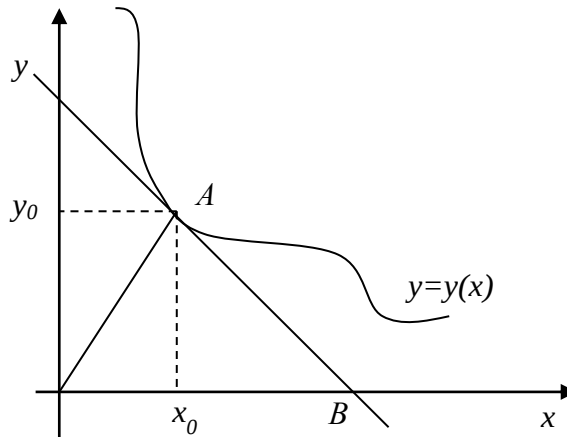


Рис.9

Проведемо дотичну через точку (x_0, y_0) і опустимо з неї перпендикуляр AH на вісь абсцис. Тоді площа трикутника OAB буде дорівнювати $S = \frac{1}{2} OB \cdot AH$.

За побудовою $AH = |y_0|$. Знайдемо OB . Рівняння дотичної має вигляд

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

У точці B $y=0$, звідси знайдемо x :

$$0 - y_0 = y'(x_0)(x - x_0); \quad -\frac{y_0}{y'(x_0)} = x - x_0; \quad x = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}.$$

$$\text{Відтак } OB = \left| x_0 - \frac{y_0}{y_0'} \right| \quad \text{і} \quad S = \frac{1}{2} \left| x_0 - \frac{y_0}{y_0'} \right| |y_0| \quad \text{або} \quad \frac{1}{2} \left| \left(x_0 - \frac{y_0}{y_0'} \right) y_0 \right| = a^2.$$

Оскільки точка (x_0, y_0) взята довільно, то останнє рівняння визначає всі криві, які задовільняють умову задачі. Розв'яжемо рівняння за умови $\left(x - \frac{y}{y'} \right) y \geq 0$:

$$\left(x - \frac{y}{y'} \right) y = 2a^2; \quad xy - \frac{y^2}{y'} - 2a^2 = 0; \quad xyu' - y^2 - 2ay' = 0.$$

Маємо узагальнено-однорідне рівняння. Визначимо коефіцієнт однорідності:

$$2k = 2k = k - 1; \quad k = -1.$$

Зробимо заміну: $y = z^{-1} = \frac{1}{z}$; $y' = -\frac{z'}{z^2}$, тоді

$$\begin{cases} -x \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z^2} + 2a^2 \cdot \frac{z'}{z^2} = 0, \\ y = 0 - \text{особливий розв'язок}, \end{cases}$$

$$-\frac{x}{z}z' - 1 + 2a^2z'; \quad z' \left(2a^2 - \frac{x}{z} \right) = 1.$$

У результаті маємо однорідне рівняння, для розв'язання якого введемо заміну:

$z = ux, z' = u + xu'$. Таким чином, одержимо нове рівняння

$$(u + xu') \left(2a^2 - \frac{1}{u} \right) = 1; (u + xu') (2a^2u - 1) = u; \quad x \frac{du}{dx} (2a^2u - 1) = 2u - 2a^2u^2;$$

$$\int \frac{(2a^2u - 1)du}{2u(1 - a^2u)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Далі, застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{2a^2 - 1}{u(1 - a^2u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1 - a^2u} = \frac{A - Aa^2u + Bu}{u(1 - a^2u)};$$

$$\begin{cases} A = -1, \\ -Aa^2 + B = 2a^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = a^2; \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{u} + \frac{a^2}{1 - a^2u} \right) du;$$

$$\ln|x| = \frac{1}{2} (-\ln|u| - \ln|1 - a^2u| + \ln C); \quad 2\ln|x| + \ln|u| + \ln|1 - a^2u| = \ln C;$$

$$x^2u(1 - a^2u) = C; \quad x^2 \frac{z}{x} \left(1 - a^2 \frac{z}{x} \right) = C; \quad z(x - a^2z) = C; \quad \frac{1}{y} \left(x - a^2 \frac{1}{y} \right) = C;$$

$$x - a^2 \frac{1}{y} = Cy \quad \text{або} \quad xy = Cy^2 + a^2.$$

Особливий розв'язок $y=0$ входить в отриманий загальний у разі, якщо $a^2 = 0$

і $C = 0$. Якщо $\left(x - \frac{y}{y'} \right) y < 0$, то розв'язок набуде такого вигляду:

$$xy = Cy^2 + a^2.$$

Таким чином рівняння шуканих кривих визначені.

13. Інші задачі та приклади їх застосувань

Задача 36 (задача гідравліки)

Прямолінійною трубою радіуса R тече рідина. Швидкість течії v кожного шару рідини збільшується з наближенням його до центру труби (вісь циліндра). Знайти v як функцію відстані r відповідного шару рідини від осі циліндра.

Розв'язання

З гідравліки відомо, що залежність між швидкістю v і відстанню r виражають через рівняння

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma \cdot i \cdot r}{2\varepsilon},$$

де ε – коефіцієнт в'язкості; i – гідравлічний спад; γ – густина рідини. Проінтегрувавши рівняння, отримаємо вираз для швидкості

$$v = \frac{\gamma \cdot i \cdot r^2}{4\varepsilon} + C.$$

Сталу C визначимо з умови, що швидкість течії шару рідини, який безпосередньо прилягає до труби, дорівнює нулю, тобто $v(R) = 0$:

$$v(R) = -\frac{\gamma}{4\varepsilon}R^2 + C = 0; \quad C = \frac{\gamma \cdot i \cdot R^2}{4\varepsilon}.$$

Таким чином, $v(r) = \frac{\gamma \cdot i}{4\varepsilon} \cdot (R^2 - r^2)$.

Закон Бойля-Маріотта: густина пропорційна тиску.

$$T = \text{const}, \quad PV = \text{const} \quad \text{або} \quad PV = P_0 V_0$$

Закон Гей-Люсака :

$$P = \text{const}, \quad V = V_0(1 + \alpha_v t).$$

Закон Шарля:

$$V = \text{const}, \quad p = p_0(1 + \alpha_p t).$$

Задача 37 (атмосферний тиск)

Відомо, що чим вище повітря над рівнем моря, тим більш воно розріджене – атмосферний тиск з висотою зменшується. Визначити залежність $p = p(h)$ тиску p від висоти h .

Розв'язання

За величину атмосферного тиску беремо вагу вертикального стовпа повітря з площею перетину $S = 1 \text{ см}^2$. Проведемо два горизонтальні перерізи цього стовпа на висотах h і $h + \Delta h$. Різниця тиску $p(h) - p(h + \Delta h) = -\Delta p(h)$ на цих висотах числово дорівнює вазі стовпчика повітря між двома перерізами:

$$-\Delta p(h) = \Delta m \cdot g,$$

де Δm – маса цього повітря; g – прискорення вільного падіння.

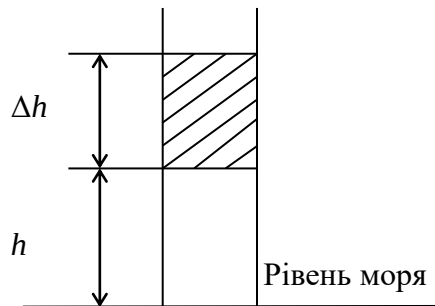


Рис.10

Об'єм ΔV стовпчика дорівнює $\Delta V = S \cdot \Delta h$, тому якщо середня густина повітря в стовпчику дорівнює $\rho_{\text{середн}}$, то $\Delta m = \rho_{\text{середн}} \cdot \Delta h$, звідси

$$-\Delta p(h) = g \cdot \rho_{\text{середн}} \cdot \Delta h, \quad \frac{\Delta p(h)}{\Delta h} = -g \cdot \rho_{\text{середн}}.$$

Позначимо густину повітря на висоті h через $\rho(h)$. Тоді за $\Delta h \rightarrow 0$, середня густина $\rho_{\text{середн}} \rightarrow \rho(h)$. Переходячи до межі в останньому співвідношенні, одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dp}{dh} = -g \cdot \rho(h),$$

де функція $\rho(h)$ невідома.

Припускаючи, що температура повітря одна й та ж сама у всіх шарах атмосфери, із закону Бойля-Маріотта або з рівняння газового стану отримуємо, що тиск пропорційний густині

$$p(h) = b \cdot \rho(h).$$

Отже, $p \cdot V = R \cdot T = \text{const}$, де R – універсальна газова постійна, звідси

$$p = \frac{R \cdot T}{V} = \frac{R}{M} \cdot \frac{M \cdot T}{V},$$

де $b = \frac{R \cdot T}{M}$; $\rho(h) = \frac{M}{V}$, M – молярна маса газу.

Отримаємо диференціальне рівняння $\frac{dp}{dh} = -\frac{g}{b} \cdot p$, звідси маємо шукану

залежність тиску p від висоти h у вигляді $p(h) = p_0 e^{-\frac{g}{b} \cdot h}$.

Задача 38 (процес переходу в електричному ланцюзі)

У ланцюзі з індуктивністю відбувається перехідний процес. Індуктивність L і активний опір R постійні. Напругу u задано як функцію від часу $u = f(t)$. Початковий струм дорівнює i_0 . Знайти залежність струму i від часу t (розглянути випадок, коли $u = u_0 = \text{const}$).

Розв'язання

Струм i в ланцюзі з часом змінюється, внаслідок наявності індуктивності L виникає електрорушійна сила (е.р.с.) самоіндукції

$$e_L = -L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Згідно із законом Кірхгофа падіння напруги в ланцюзі дорівнює сумі е.р.с., тобто

$$u - L \frac{di}{dt} = R \cdot i \quad \text{або} \quad L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = u.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку, розв'язок якого шукатимемо у вигляді

$$i(t) = p(t)q(t).$$

Цю форму розв'язку підставляємо у вихідне рівняння

$$L \cdot q \cdot \frac{dp}{dt} + p \left(L \cdot \frac{dq}{dt} + R \cdot q \right) = u.$$

Функції p і q знаходимо із системи

$$\begin{cases} L \cdot \frac{dq}{dt} + R \cdot q = 0 \\ L \cdot q \cdot \frac{dp}{dt} = u \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо шуканий розв'язок вихідного рівняння

$$i = e^{-\frac{R \cdot t}{L}} \left(C + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) e^{\frac{R \cdot \tau}{L}} d\tau \right).$$

Оскільки $i(0) = i_0$, $u = f(t)$, то

$$i = e^{-\frac{R \cdot t}{L}} \left(i_0 + \frac{1}{L} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{R \cdot \tau}{L}} d\tau \right)$$

.

Якщо ж $f(t) = u_0 = \text{const}$, то

$$i = \left(i_0 - \frac{u_0}{R} \right) e^{-\frac{R \cdot t}{L}} + \frac{u_0}{R}.$$

Із ростом t експонента $e^{-\frac{R \cdot t}{L}}$ зменшується, і через деякий проміжок часу процес можна вважати сталим. Струм визначатимемо за законом Ома: $i = \frac{u_0}{R}$.

Задача 39 (ортогональні траєкторії)

Скласти диференціальні рівняння траєкторій, які перетинають лінії даного сімейства $x^2 + C^2 = 2Cy$ під кутом 90° .

Розв'язання

Для того щоб скласти диференціальне рівняння траєкторій, потрібно скласти диференціальне рівняння заданого сімейства. Це рівняння матиме вигляд

$$f(x, y, y') = 0.$$

Продиференціюємо рівняння сімейства і виразимо C :

$$2x - 2Cy' = 0 \Rightarrow C = \frac{x}{y'},$$

потім підставимо у вихідне рівняння:

$$x^2 + \frac{x^2}{y'^2} = \frac{2xy}{y'^2}; \quad x^2 \left(1 + \frac{1}{y'^2} \right) = \frac{2xy}{y'^2}; \quad x^2(1 + y'^2) = 2xyy'; \quad x(1 + y'^2) = 2yy'.$$

У задачі траєкторії перетинають лінії даного сімейства під кутом 90° , отже, траєкторії є ортогональні, таким чином, у наслідок ортогональності

$$\text{tg} \beta = -\frac{1}{\text{tg} \alpha},$$

де $\operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт траєкторій, а $\operatorname{tg} \beta = y'$, тобто $y' = -\frac{1}{y_m}$. Підставимо дану рівність у диференціальне рівняння сімейства і отримаємо шукані диференціальні рівняння ортогональних траєкторій

$$x \left(1 + \frac{1}{(y'_m)^2} \right) = -2y \cdot \frac{1}{y'_m}, \quad x(1 + (y'_m)^2) = -2yy'_m.$$

Задача 40

Для зупинки річкових суден біля пристані з них кидають канат, який намотують на стовп, що стоїть на пристані. Яка сила буде гальмувати судно, якщо канатом роблять три витки навколо стовпа, коефіцієнт тертя канату дорівнює $\frac{1}{3}$. Робітник на пристані тягне канат за вільний кінець із силою 10 кг.

Розв'язання

Нехай $y(\varphi)$ – сила натягу канату, що змінюється залежно від кількості витків. Тоді для кожної малої відстані на дузі $\Delta\varphi$ сила натягу зростатиме за законом $y(\varphi + \Delta\varphi) - y(\varphi) = \Delta\varphi \cdot \mu \cdot y(\varphi)$, де φ – відстань на дузі (в радіанах), μ – коефіцієнт тертя канату. Тоді

$$y' = \frac{1}{3} y; \quad y' = \mu y(\varphi); \quad y(\varphi) = y(0) \cdot e^{\frac{\varphi}{3}},$$

де $y(0)$ – сила, з якою робочий тягне канат. Таким чином, гальмівна сила для судна дорівнює

$$y(6\pi) = y(0) \cdot e^{2\pi} \approx 5000 \text{ кг.}$$

Задача 41 (крива погоні)

Міноносець полює за підводним човном у густому тумані. У якийсь момент часу туман розвіявся і підводний човен виявився виявленням на поверхні води на відстані 3 миль від міноносця. Швидкість міноносця удвічі більша швидкості підводного човна. Потрібно визначити траєкторію (криву погоні), по якій має слідувати міноносець, щоб пройти точно над підводним човном, якщо останній відразу ж занурюється після його виявлення та прямує на повній швидкості у невідомому напрямку.

Розв'язання

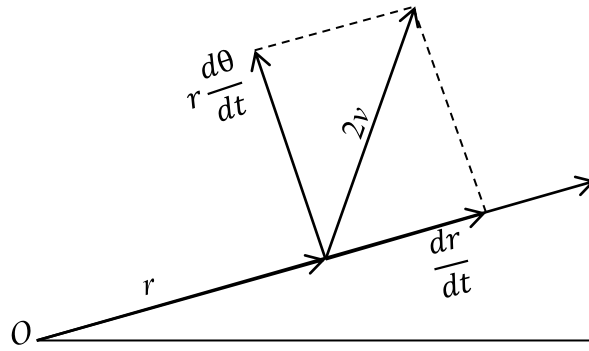


Рис.11

Уведемо полярні координати r, θ таким чином, щоб полюс O перебував у точці виявлення підводного човна, а полярна вісь r проходила через точку, в якій у момент виявлення підводного човна був міноносець. Перш за все міноноскою треба зайняти таку позицію, щоб і він, і підводний човен були на одній відстані від полюса O . Потім міноносець має рухатися навколо полюса O по такій траєкторії, щоб обидва рухомих об'єкти весь час перебували на однаковій відстані від точки O . Тільки в цьому випадку міноносець, рухаючись навколо полюса O , пройде над підводним човном. З вищесказаного випливає, що спочатку міноносець повинен рухатись прямим курсом до точки O до тих пір, поки не опиниться на тій же відстані x від полюса O , що і підводний човен.

Відстань x можна знайти з рівняння

$$\frac{x}{v} = \frac{3 - x}{2v}$$

або

$$\frac{x}{v} = \frac{3 + x}{2v},$$

де v — швидкість підводного човна; $2v$ — швидкість міноносця. Розв'язуючи останні рівняння, знаходимо, що відстань x дорівнює або одній, або трьом милям.

Далі, якщо «зустрічі» не відбулося, то міноносець повинен надалі рухатися навколо полюса O (за годинниковою стрілкою або проти),

віддаляючись від нього зі швидкістю підводного човна v . Розкладемо швидкість міноносця на дві складові: *радіальну* v_r і *тангенціальну* v_T .

Радіальна складова – це швидкість, з якою міноносець віддаляється від полюса O , тобто

$$v_r = \frac{dr}{dt}.$$

Тангенціальна складова – це лінійна швидкість руху міноносця навколо полюса O . Вона дорівнює добутку кутової швидкості $\frac{d\theta}{dt}$ на радіус r , тобто

$$v_T = r \frac{d\theta}{dt}.$$

Але оскільки $v_r = v$, то $v_T = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}v$.

Отже, розв'язок вихідної задачі зводиться до розв'язання системи двох диференціальних рівнянь

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v,$$

яка, у свою чергу, може зводитися до одного рівняння $\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{3}}$ виключенням змінної t . Розв'язуючи останнє диференціальне рівняння, отримуємо розв'язок у вигляді

$$r = Ce^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}, \text{ де } C - \text{довільна стала.}$$

Зважаючи, що міноносець починає рух навколо полюса O з полярної осі r на відстані x миль від точки O , тобто враховуючи, що $r = 1$ за $\theta = 0$ та $r = 3$ за $\theta = -\pi$, доходимо висновку, що у першому випадку $C = 1$, а в другому $C = 3e^{\pi/\sqrt{3}}$. Таким чином, щоб виконати своє завдання, міноносець має пройти дві або шість миль прямим курсом у напрямку до місця виявлення підводного човна, а потім рухатися

$$\text{по спіралі } r = Ce^{\theta/\sqrt{3}} \quad \text{або} \quad r = 3e^{(\theta+\pi)/\sqrt{3}}.$$

Цей приклад демонструє застосування диференціальних рівнянь для вибору правильної стратегії під час розв'язання задач пошуку.

Задача 42 (малі коливання маятника)

Кулька масою m закріплена на кінці M невагомому стержню OM , підвішеного шарнірно в точці O так, що виходить маятник, який гойдається в одній площині. Записати закон малих коливань.

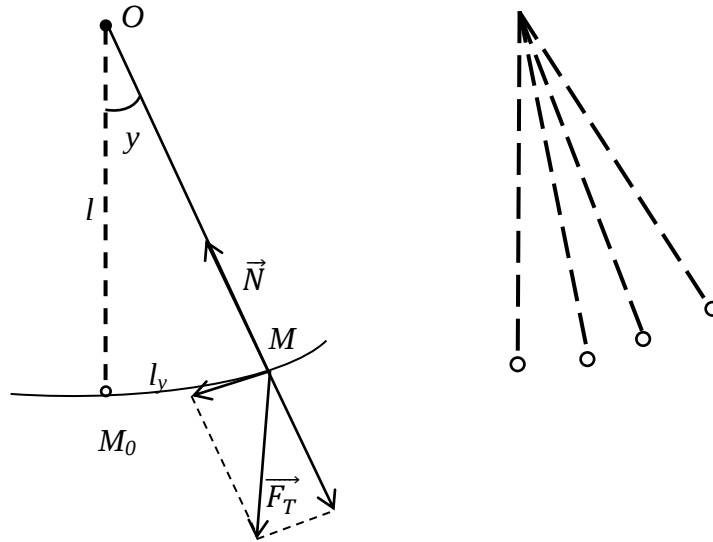


Рис.12

Розв'язання

Відхилення маятника OM від положення рівноваги OM_0 зручно вимірювати величиною y кута M_0OM , вираженою в радіанах.

На кульку діють дві сили: направлена вертикально вниз сила тяжіння $F_T = -mg$ та направлена по радіусу MO сила реакції стержня N .

Запишемо другий закон Ньютона в проекціях на дотичну:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(ly) = -mg \sin y$$

або

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin y.$$

Розглянемо малі коливання маятника, тобто вважатимемо величину y малою. Тоді $\sin y$ можна замінити на y , знаючи, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, і від отриманого рівняння перейдемо до рівняння вигляду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{g}{l} y$$

або

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0,$$

де $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Бачимо, що за малих відхилень від положення рівноваги коливання маятника є майже гармонічні з частотою $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, що не залежить від маси m та від початкових умов, тільки б y_0 та v_0 були достатньо малими.

Задача 43

Промінь світла падає з точки A в точку P зі швидкістю v_1 , а потім проходить в більш щільному середовищі від точки P до точки B з меншою швидкістю v_2 . Побудувати закон поширення світла.

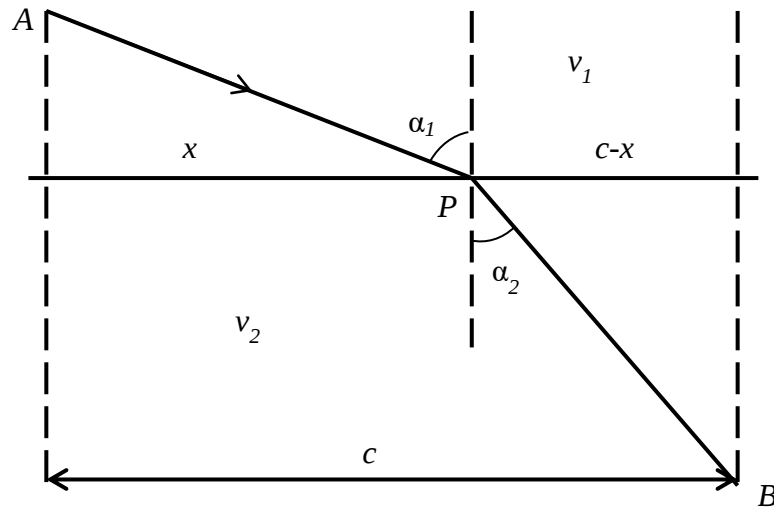


Рис.13

Розв'язання

Повний час T , необхідний для проходження променю світла від точки A до точки B , визначимо з рівності

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

Якщо припустити, що промінь світла проходить від точки A до точки B

вказаним шляхом за мінімальний час T , то похідна $\frac{dT}{dx} = 0$. Відтак

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

або

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}.$$

Остання рівність становить відомий закон заломлення Снелліуса, відкритий спочатку експериментально у формі

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = a,$$

де $a = \text{const.}$

Висловлене припущення, що промінь світла проходить від точки A до точки B за мінімальний час, називають принципом Ферма найменшого часу. Значення цього принципу полягає не тільки в тому, що він дає раціональну основу для виведення закону Снелліуса, але, зокрема, і в тому, що він може бути застосовний для знаходження траєкторії променя світла, коли останній проходить через середовище змінної щільності, взагалі кажучи, не по відрізках прямих.

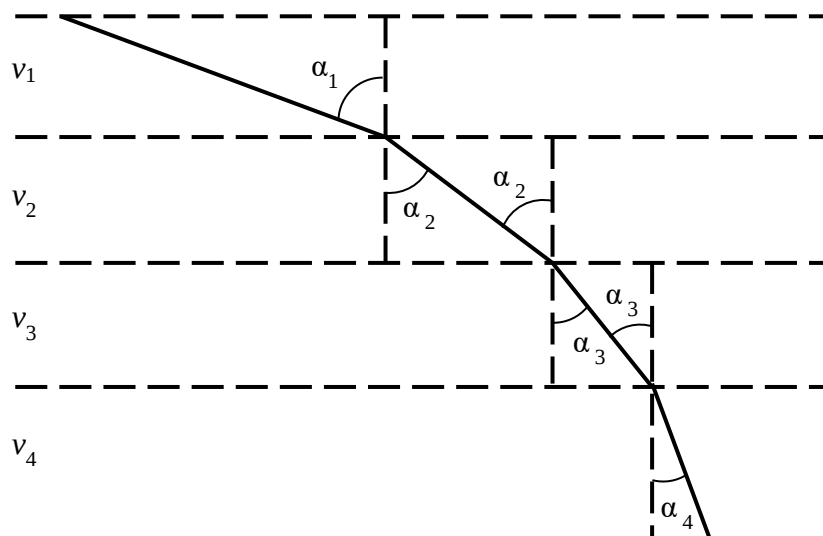


Рис.14

Для прикладу розглянемо шарувате середовище (рис.14). У кожному окремому шарі швидкість світла постійна, але вона зменшується у разі переходу від вищого шару до нижчого. Спадаючий промінь світла під час переходу від шару до шару заломлюється все більше і більше у напрямку до вертикалі. Застосувавши *закон Снелліуса* до кордонів між шарами, отримаємо співвідношення

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = \frac{\sin \alpha_4}{v_4}.$$

Припустимо тепер, що товщина шарів необмежено зменшується, а число шарів необмежено зростає. Тоді у разі переходу до межі швидкість світла спадає безперервно і ми отримуємо, що

$$\frac{\sin \alpha}{v} = a, \quad a = \text{const}.$$

Подібна ситуація спостерігається (з певними застереженнями) у разі спадаючого на землю променя сонця, коли він уповільнює швидкість при проходженні через атмосферу зі зростаючою щільністю.

Задача 44 (брахістохрона)

Задачу про брахістохрону, або криву найшвидшого спуску, поставив швейцарський математик Й. Бернуллі в 1696 р. Вона залишається актуальною і сьогодні. На практиці брахістохрони можуть бути застосовні у техніці для скорочення часу отримання необхідних результатів робіт, наприклад, у випадку визначення оптимальної форми аварійних надувних трапів, які в даний час, крім користування в кожному пасажирському літаку, набувають широкого застосування в системах пожежної безпеки у школах і лікарнях як швидкий спосіб евакуації з нижніх поверхів будівлі через вікна. У випадках застосування таких трапів у будівлях їх форму мають розробляти індивідуально для кожного випадка з урахуванням міської забудови. Результати також можна застосувати у військово-космічній галузі під час розрахунку траєкторій для запуску ракет з нерухомих об'єктів, розміщених над поверхнею землі, оскільки дозволяють отримувати траєкторії, що забезпечують найшвидше досягнення цілі.

У вертикальній площині розміщено дві точки A і B (рис.15), що не лежать на одній вертикалі. Необхідно серед усіх кривих, що проходять через зазначені точки, знайти таку, спускаючись по якій під дією сили тяжіння, матеріальна точка скотилась би з точки A в точку B за найкоротший час.

Розв'язання

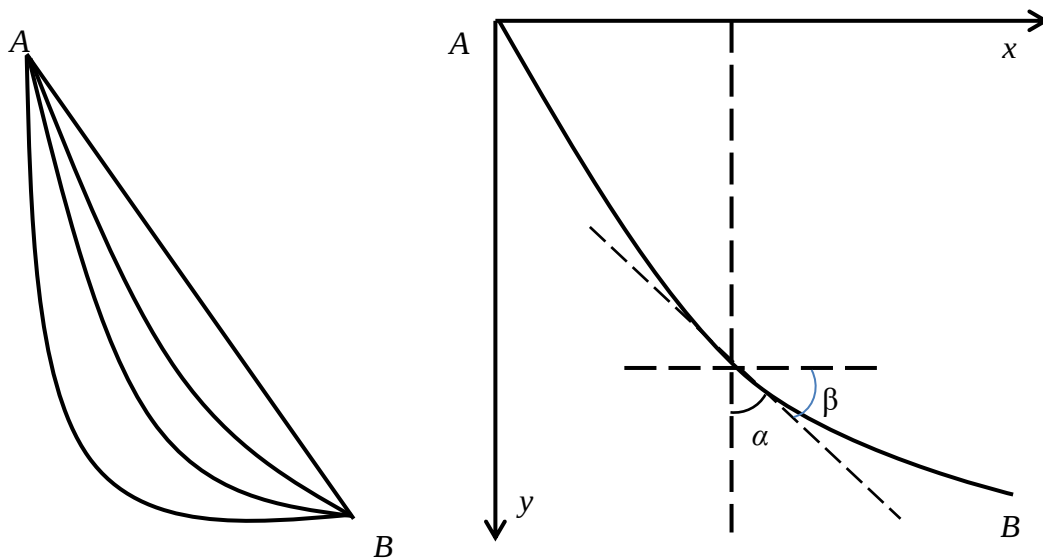


Рис.15

Уведемо систему координат у вертикальній площині так, як це показано на рисунку, і уявімо, що кулька (подібно променю світла) здатна вибрати собі таку траєкторію спуску з точки A в точку B , щоб час спуску був найменшим.

Тоді, за аналогічних міркувань (дивись попередню задачу) має місце формула

$$\frac{\sin \alpha}{v} = a, \quad a = \text{const}.$$

Спираючись на принцип збереження енергії, отримуємо, що швидкість, досягнута кулькою на заданому рівні, залежить тільки від втрати потенційної енергії під час досягнення цього рівня, а не від вигляду траєкторії, по якій скочується кулька. Це означає, що $v = \sqrt{2gy}$.

З іншого боку, геометричні побудови показують, що мають місце співвідношення

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sec \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Комбінуючи тоді першу рівність з останніми двома відношеннями, отримуємо рівняння

$$y[1 + (y')^2] = C.$$

Останнє рівняння і є диференціальне рівняння брахістохрони. Покажемо зараз, що брахістохрона – це циклоїда, і тільки вона. Дійсно, оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то, розділивши змінні, отримаємо рівняння вигляду

$$dx = \left(\frac{y}{C - y} \right)^{\frac{1}{2}} dy.$$

Уведемо тепер нову змінну φ , вважаючи, що

$$\left(\frac{y}{C - y} \right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Тоді

$$\begin{aligned} y &= C \sin^2 \varphi, & dy &= 2C \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \\ dx &= \operatorname{tg} \varphi dy = 2C \sin^2 \varphi d\varphi = C(1 - \cos 2\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Інтегрування останнього рівняння приводить до співвідношення

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + C_1,$$

де, в силу початкових умов, $x = y = 0$ за $\varphi = 0$ і постійна $C_1 = 0$.

Отже,

$$x = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y = C \sin^2 \varphi = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Будемо вважати, що $C/2 = r$, $2\varphi = \theta$,

відтак прийдемо до стандартних параметричних рівнянь циклоїди:

$$r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta), \quad \text{де } r \text{ — радіус кола, } \theta \text{ — кут.}$$

Таким чином, розв'язком задачі про брахістохрону є дуга циклоїди з горизонтальною основою, точка повернення якої розміщена в точці A , інакше кажучи, має вертикальну дотичну в точці A . Зазначимо, що час спуску не залежить від розташування початкової точки на дузі циклоїди.

Задача 45 (моделі бойових дій)

Під час Першої світової війни англійський інженер і математик Ф.У.Ланчестер побудував декілька математичних моделей ведення повітряних битв. Потім ці моделі були узагальнені і поширені на випадок бойових дій регулярних військ, партизанських з'єднань або тих та інших одночасно. Побудувати диференціальне рівняння, що описує такі стратегії.

Розв'язання

Ці три моделі ми і розглянемо нижче.

Нехай x і y – дві протиборчі сторони; t – час (дн) зміни чисельного складу.

OLR – швидкість, з якою сторона x або y несе втрати від хвороб та інших чинників, не пов'язаних з бойовими діями.

CLR – швидкість, з якою сторона x або y несе втрати в процесі бойових дій із стороною y .

RR – швидкість підходу підкріплення $x(t)$ або $y(t)$.

Загальну швидкість зміни чисельного складу задамо рівняннями

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -(OLR + CLR) + RR, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -(OLR + CLR) + RR,\end{aligned}$$

a, b, c, d, g, h – невід'ємні постійні, що характеризують вплив різних чинників на втрати в живій силі сторін $x(t)$ і $y(t)$;

$P(t)$ і $Q(t)$ – доданки, що враховують можливість підходу підкріплень силам x і y протягом дня;

x_0 і y_0 – чисельний склад сил x і y перед початком бойових дій.

Диференціальна система типу (A)

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t) \end{cases}$$

описує бойові дії між регулярними військами.

Диференціальна система типу (B)

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -dy(t) - hx(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

описує бойові дії між партизанськими з'єднаннями.

Диференціальна система (C)

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t) \end{cases}$$

описує змішаний тип бойових дій регулярних військ і партизанських з'єднань.

Втрати в живій силі, не пов'язані з бойовими діями, $ax(t)$ і $dy(t)$; швидкість втрат:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -a; \quad \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -d.$$

$by(t)$ і $cx(t)$ – бойові втрати; коефіцієнти b і c – ефективність бойових дій сторін y і x відповідно.

$$\frac{1}{y} \frac{dx}{dt} = -b; \quad \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} = -c$$

$$b = r_y p_y; \quad c = r_x p_x,$$

де r_y та r_x – коефіцієнти вогневої потужності сторін y та x ;

p_y та p_x – вірогідність того, що кожен із пострілів сторони буде влучним:

$$\begin{cases} \dot{x}_t = -by \\ \dot{y}_t = -cx \end{cases}.$$

Перейдемо від системи до рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та розв'яжемо його:

$$\ddot{x} = -by$$

$$\ddot{x} = -b(-cx)$$

$$\ddot{x} = bcx$$

$$\ddot{x} - bcx = 0$$

$$k^2 - bc = 0$$

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{bc}$$

Отримаємо розв'язок цього рівняння у вигляді системи (D)

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\sqrt{b}ct} + C_2 e^{-\sqrt{b}ct} \\ y(t) = \sqrt{\frac{c}{b}} C_1 e^{\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{c}{b}} C_2 e^{-\sqrt{t}} \end{cases}.$$

Нехай бойові сили партизан чисельністю $x(t)$ займають територію R , залишаючись невидимими для супротивника. Втрати партизанських з'єднань x запишемо у вигляді $-gx(t)y(t)$. Для визначення ефективності бойових дій сторони y можемо скористатися коефіцієнтами вогневої потужності r_y , вірогідність влучного пострілу з боку y прямо пропорційна територіальній ефективності Ar_y одного пострілу з боку y і обернено пропорційна до площі Ax території R , зайнятої силами x . Через Ar_y позначимо площу, яку займає один партизан. Вірогідні формули для визначення сталих g і h такі:

$$g = r_y \frac{Ar_y}{Ax}; \quad h = r_x \frac{Ar_x}{Ay}.$$

Таким чином, системи диференціальних рівнянь (A), (B), (C) описують три різні моделі бойових дій, система (D) демонструє розв'язок для одного випадку, крім того наведені формули для обчислення невідомих сталих.

Окрім наведених вище прикладів певний інтерес являє собою побудова математичних моделей і відповідних диференціальних рівнянь для законів Кеплера руху планет і небесної механіки, розв'язання екологічних задач і проблеми карної відповідальності за браконьєрство, задач про водяні, маятникові та циклоїдальні годинники і їх точність, задач моделювання невагомості, задач про стійкість точок рівноваги і періодичних розв'язків, задач формування та регулювання попиту і пропозиції, задач ефективності реклами, виробничих задач про транспортування, економічних задач прогнозування фінансових ризиків тощо.

14. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти криві, для яких сума катетів трикутника, обмеженого дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є стала, що дорівнює a .

2. У чан налито 1 л води, температура якої дорівнює 22° . У воду опущено алюмінієвий предмет масою 0,5 кг, питомою теплоємністю 0,2 і температурою 75° . Через хвилину температура води збільшилася на 2° . Протягом якого часу різниця температур води і предмета досягне 1° ? Втратами тепла на нагрівання чану та іншими знехтувати.
3. На матеріальну точку масою m діє стала сила, яка надає точці прискорення a . Сила опору навколишнього середовища пропорційна швидкості руху точки з коефіцієнтом пропорційності γ . Знайти залежність швидкості від часу, якщо в початковий момент точка перебувала в стані спокою.
4. Протягом якого часу витече вся вода із циліндричного чану діаметром $2R=1,8$ м і висотою $H=2,45$ м через отвір у дні? Діаметр отвору $2r=6$ см. Вісь чана вертикальна.
5. У чан налито 100 л ропи, що містить 10 кг солі. Зі швидкістю 5 л за хвилину в чан додають воду, змішуючи її з ропою, підтримуючи рівномірну концентрацію. З такою ж швидкістю суміш витікає з чана. Скільки солі залишиться в чані з розчином через годину?
6. Температура повітря дорівнює 20° . Тіло протягом 10 хв охолоджується від 100° до 60° . Знайти залежність температури від часу. Через який час температура тіла знизиться до 25° ?
7. Швидкість, з якою матеріальна точка рухається по прямій, обернено пропорційна пройденому шляху. У початковий момент руху точка містилася на відстані 5 м від початку обліку шляху і мала швидкість 20 м/с. Який шлях пройде точка протягом 10 с після початку руху? Якою буде її швидкість в цей момент?
8. За який час витече вся вода із циліндричного чана з діаметром $2R=1,8$ м і висотою $H=2,45$ м через отвір у дні? Діаметр отвору $2r=6$ см, вісь циліндра горизонтальна.
9. Скласти рівняння кривих, для яких відрізок осі абсцис, що відтинається дотичною і нормаллю, проведеними з довільної точки кривої, має сталу довжину $2a$.

10. У повітрі кімнати, об'єм якої становить 200 м^3 , міститься $0,15\%$ вуглекислого газу (CO_2). Вентилятор подає за хвилину 20 м^3 повітря, до складу якого входить $0,04\%$ CO_2 . За який час кількість вуглекислого газу у повітрі кімнати зменшиться втричі?
11. Кусок металу, температура якого a градусів, помістили в піч. Температура печі протягом години рівномірно підвищувалася від a до b градусів. За різниці температур печі і металу в T градусів метал нагрівається зі швидкістю kT градусів за хвилину. Визначити температуру металу через годину.
12. Установлений вертикально чан циліндричної форми має отвір у дні. Половина води з повного чана витікає за 5 хв. За який час витече вся вода?
13. Кількість світла, що поглинається під час проходження крізь тонкий шар води, пропорційна товщі шару і кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо під час проходження крізь шар товщиною 35 см поглинається половина початкової кількості світла, то яку частину цієї кількості поглине шар товщиною 2 м?
14. Знайти криві, для яких точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис має абсцису, удвічі меншу за абсцису точки дотику.
15. У чан, який містить 20 л води, неперервно зі швидкістю 5 л за хвилину подається розчин, в кожному літрі якого міститься 0,2 кг солі. Розчин перемішується, і суміш витікає із чана з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в чані через 4 хвилини?
16. Циліндричну котушку виготовлено з мідного дроту. Під час проходження через котушку електричного струму утворюється тепло. Вивести формулу для температури $T = T(t)$ усталеного режиму залежно від часу t , якщо температура навколишнього середовища дорівнює T_0 .
17. Лійка має форму конуса, оберненого вершиною вниз, радіусом $R=6 \text{ см}$ і висотою $H=10 \text{ см}$. За який час витече вся вода із лійки через круглий отвір з діаметром 0,5 см у вершині конуса?

18. Парашутист стрибнув з висоти 1,5 км і розкрив парашут на висоті 0,5 км. Протягом якого часу він падав до розкриття парашута, якщо гранична швидкість падіння людини у повітрі нормальної густини дорівнює 50 м/с? Вважати опір повітря пропорційним квадрату швидкості. Зміною густини з висотою знехтувати.
19. Визначити криві, які поділяють прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них з будь-якої точки кривої, у відношенні 1:2.
20. У чані міститься 50 л води. Неперервно зі швидкість 2 л за хвилину в чан вливається ропа, у кожному літрі якої міститься 0,3 кг солі. Розчин перемішується і витікає із чану з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в чані через 5 хвилин?
21. Футбольний м'яч вагою 0,4 кг підкинуто вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря є пропорційний квадрату швидкості і за швидкості 1 м/с становить 0,48 г. Обчислити час підйому м'яча та найбільшу висоту.
22. У прямокутний чан розміром площини основи 60×75 см і висотою 80 см подається 1,8 л води за секунду. Дно чана має отвір, площа якого становить $2,5 \text{ см}^2$. За який час наповниться чан?
23. За 30 днів розпалось 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Через скільки днів залишиться 1% від початкової кількості цієї речовини?
24. Крива $y = y(x)$ проходить через точку (1, 2), а кожна її дотична перетинає пряму $y = 1$ у точці з абсцисою, яка дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву $y = y(x)$.
25. Посудину, об'єм якої становить 40 л, наповнено повітрям (70% азоту і 30% кисню). У посудину подається 0,2 л азоту за секунду, який неперервно перемішується, і з посудини витікає така ж кількість суміші. Протягом якого часу в посудині буде 85% азоту?
26. Згідно з експериментом протягом року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина початкового радію?

27. Матеріальна точка, маса якої дорівнює m , рухається вздовж осі Ox . Робота сили, яка діє на точку, пропорційна часу t від початку руху з коефіцієнтом пропорційності k . Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент $t = 0$ точка перебувала в стані спокою на відстані S_0 від початку відліку.
28. Посудину, що має форму півкулі радіусом 2 м, наповнено водою. За який час витече вся вода через круглий отвір у дні з радіусом 0,1 м?
29. Довести, що крива, для якої всі її нормалі проходять через точку (a, b) , є коло.
30. Дно резервуара, об'єм якого становить 300 л, вкрите сіллю. Швидкість розчинення солі пропорційна різниці між концентрацією в даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг солі на 3 л води), початкова кількість чистої води розчиняє $1/3$ кг солі за хвилину. Скільки солі буде в розчині через 1 годину?
31. Температура повітря становить 40° . За 30 хвилин тіло охолонуло від 200° до 120° . Коли тіло охолоне до 80° ?
32. Товщина дошки становить $h=10$ см. Куля влітає в дошку зі швидкістю $v_0 = 200$ м/с, а вилітає, пробивши її, зі швидкістю $v_1 = 80$ м/с. Знайти час руху кулі через дошку, якщо сила опору дошки стосовно руху кулі пропорційна квадрату швидкості руху.
33. Посудину, що має форму циліндра з вертикальною віссю, радіус основи якої 2 м і висота 6 м, наповнено водою. За яким законом знижатиметься рівень води в посудині з плином часу?
34. Деяка кількість нерозчинної речовини містить у своїх порах 10 кг солі. Піддаючи її дії 90 л води, побачили, що за 1 годину розчинилася половина наявної кількості солі. Скільки солі розчинилося б протягом того самого часу, якщо кількість води подвоїти? Вважати швидкість розчинювання пропорційною кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією розчину в даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3 л).

35. Знайти криву, для якої площа Q , обмежена кривою, віссю абсцис і двома ординатами $X = 0$ та $X = x$, є даною функцією $y : Q = a^2 \ln\left(\frac{y}{a}\right)$.
36. Температура повітря становить 20° . За 10 хв тіло охолонуло від 100° до 60° . Коли тіло охолоне до 25° ?
37. Який шлях пройде тіло за час t , якщо його швидкість пропорційна пройденому шляху і якщо тіло проходить 100 м за 10 с і 200 м за 15 с?
38. Знайти час T , за який керосин, що заповнює конічну лійку висотою 50 см і кутом при вершині 60° , витече з неї через малий отвір площиною 0,3 см у вершині конуса.
39. Знайти криву, що проходить через початок координат, для якої площа, що обмежена кривою, віссю Ox та довільною ординатою, дорівнює кубові цієї ординати.
40. У повітрі приміщення, об'єм якого становить 10800 м^3 , міститься 0,12% CO_2 . Скільки повітря (м^3), яке містить 0,04% CO_2 , потрібно подавати щохвилини до приміщення, щоб через 10 хв у ньому містилося 0,06% CO_2 ?
41. Кількість світла, що поглинається під час проходження крізь тонкий шар води, пропорційна товщі шару і кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо під час проходження крізь шар завтовшки 1 м поглинається $1/4$ початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дістанеться глибини h ?
42. Корабель уповільнює свій рух під дією опору води, який є пропорційний його швидкості. Початкова швидкість корабля 10 м/с, швидкість його через 5 с становитиме 8 м/с. Коли швидкість зменшиться до 1 м/с?
43. Знайти атмосферний тиск на висоті h , якщо на поверхні Землі тиск дорівнює 1 км/см^2 і густина повітря становить $0,0012 \text{ г/см}^3$. Скористатися законом Бойля-Маріотта, згідно з яким густина повітря пропорційна тиску, тобто знехтувати зміною температури повітря залежно від висоти.
44. Знайти криві, для яких відрізків, що відтинає дотична на осі Ox , пропорційний квадратові абсциси точки дотику.

45. У приміщенні, об'єм якого становить 10800 м^3 , повітря містить $0,18\%$ вуглекислоти. Вентилятори подають свіже повітря, до складу якого входить $0,06\%$ вуглекислоти, у кількості $a \text{ м}^3/\text{хв}$. Якою повинна бути потужність вентиляторів, щоб через 10 хв у повітрі містилося вуглекислоти не більше $0,04\%$?
46. Матеріальна точка, маса якої становить 1 г , рухається прямолінійно під дією сили, пропорційно часу і обернено пропорційно швидкості руху точки. У момент $t = 10 \text{ с}$ швидкість дорівнювала 50 см/с , а сила – 4 дїни . Якою буде швидкість через хвилину після початку руху?
47. Згідно з експериментом швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості. За який час кількість бактерій збільшиться в m раз порівняно з початковою кількістю?
48. За який час витече вся вода із повного конічного резервуара діаметрами D_1 верхньої (більшої) і D_2 – нижньої основ та висотою H через круглий отвір з діаметром a у дні?
49. Нормаль MQ кривої перетинає вісь Ox у точці Q . Довести, що коли абсциса точки Q вдвоє більша за абсцису точки M , то крива – рівнобічна гіпербола.
50. Деяка речовина перетворюється на іншу речовину зі швидкістю, пропорційною кількості неперетвореної речовини. Кількість неперетвореної речовини через годину становила $31,4 \text{ г}$, через три години – $9,7 \text{ г}$. Знайти залежність між кількістю неперетвореної речовини q за часом t . Установити, скільки було речовини на початку процесу.
51. Кількість світла, що поглинається під час проходження крізь тонкий шар води, пропорційна товщі шару і кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо під час проходження крізь шар завтовшки 2 м поглинається $1/3$ початкової кількості світла, то скільки відсотків цієї кількості досягне глибини 12 м ?
52. У циліндричному резервуарі p об'ємом V_0 атмосферне повітря адіабатично (тобто без обміну тепла з навколишнім середовищем) стискується до об'єму V_1 . Обчислити роботу тиску.

53. За який час витече увесь керосин із повної залізнодорожньої цистерни довжиною L і діаметром D через короткий зливний патрубок в її нижній частині, якщо площа поперечного перерізу патрубку дорівнює ω .
54. Знайти криву, яка проходить через точку $(0, -2)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільний її точці дорівнює потроєній ординаті цієї точки.
55. Парашутист спускається з парашутом, що має форму півкулі радіусом $R = 4$ м. Його маса разом с масою парашута дорівнює 82 кг. Знайти швидкість, з якою спускається парашутист, через 2 с після початку спуску і шлях, пройдений за час t . Вважати, що сила опору повітря дорівнює $0,00081Sv^2$, де S – площа найбільшого перерізу, перпендикулярного до напрямку руху, v – швидкість руху.
56. Кількість світла, поглинутого під час проходження крізь тонкий шар води, пропорційна товщі шару і кількості світла, що падає на його поверхню. Якщо під час проходження через шар товщиною 3 м поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дістанеться глибини 30 м?
57. Циліндричну посудину з вертикальною віссю наповнено водою. Малий отвір у дні посудини закритий діафрагмою і має 40 см^2 . За $t = 0$ діафрагма починає відкриватись, площа отвору, який при цьому виникає, пропорційна часу ($\omega = kt$). Діафрагма відкривається повністю через τ сек. Знайти рівень h_1 води в момент часу τ , якщо висота циліндра дорівнює H см, а площа основи – $S \text{ см}^2$.
58. Цегляна стіна має товщину 30 см. Знайти залежність температури від відстані до зовнішнього краю стіни, якщо температура дорівнює 20° на внутрішній і 0° на зовнішній поверхні стіни. Знайти, крім того, кількість тепла, яку стіна (на 1 см^2) віддає назовні протягом доби.
59. Знайти формулу дзеркала, що збирає всі паралельні промені в одну точку.
60. Знайти криву, для якої довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на дотичну, дорівнює абсцисі точки дотику.

61. Визначити криву, для якої відношення довжини відрізка, утворюваного дотичною на осі Oy , до довжини радіуса-вектора, є стале.
62. Знайти криву, для якої довжина відрізка, утворюваного нормаллю, проведеною в якій-небудь точці кривої, дорівнює відстані цієї точки від початку координат.
63. Знайти форму дзеркала, що відбиває всі промені, які виходять з однієї точки O паралельно даному напрямку.
64. Знайти криву, знаючи, що добуток абсциси якої-небудь точки на величину відрізка, утворюваного нормаллю на осі Oy , дорівнює подвоєному квадратові відстані між цією точкою і точкою $(0, 0)$.
65. Знайти криву, знаючи, що трикутник, утворюваний дотичною до неї, віссю Oy та радіус-вектором точки дотику, є рівнобедрений.
66. Визначити криву, для якої відношення довжини відрізка, утворюваного дотичною на осі Oy , до довжини відрізка, утворюваного нормаллю на осі Ox , є величина стала.
67. Визначити криву, усі дотичні до якої приходять через початок координат.
68. Визначити криву, знаючи, що трикутник, утворюваний нормаллю в усякій її точці з осями координат, є рівновеликий трикутнику, утвореному віссю Ox , дотичною та нормаллю.
69. Площа трапеції, утвореної дотичною до деякої кривої, осями координат та ординатою точки дотику, є величина стала і дорівнює a^2 . Знайти цю криву.
70. У чан налито 100 л ропи, що містить 10 кг розчиненої солі. Зі швидкістю 5 л за хвилину в чан подається вода, а суміш з тією ж швидкістю переливається в другий 100-літровий чан, наповнений спочатку чистою водою; надмір розчину з нього виливається. Коли кількість солі в другому чані буде найбільшою? Чому вона дорівнює?
71. Скласти рівняння кривої, що проходить через початок координат, якщо середина відрізка її нормалі, який утворюється між всякою точкою кривої і віссю Ox , міститься на параболі $y^2 = ax$.

72. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, віссю Ox і відрізком між початком координат і точкою дотику, є величина стала, що дорівнює a^2 .
73. Знайти криву, середня ордината якої на проміжку $[0, x]$, тобто величина $\frac{1}{x} \int_0^x y dt$, пропорційна ординаті в правому кінці $[0, x]$.
74. Знайти криву, дотична до якої утворює на осі Oy відрізок величиною, що складає $\frac{1}{n}$ частину суми координат точки дотику.
75. Знати криву, кожна дотична до якої перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.
76. Довести, що дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, проведені через точки перетину цих кривих з прямою, паралельною осі Oy , або перетинаються в одній і тій же точці, або паралельні між собою.
77. Нехай відомі два різні розв'язки лінійного рівняння першого порядку. Записати з їх допомогою загальний розв'язок цього рівняння.
78. Точка с масою m рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна часу, і сила опору середовища, пропорційна швидкості. Знайти залежність швидкості від часу, якщо початкова швидкість дорівнює нулю.
79. Знайти криву, знаючи, що довжина відрізка, утвореного на осі Oy її дотичною в довільній точці, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.
80. Знайти криву, для якої величина відрізка, утвореного дотичною на осі Oy , дорівнює півсумі координат точки дотику.
81. Згідно зі спостереженнями швидкість зростання популяції бактерій в момент t дорівнює розміру популяції $x(t)$, поділеному на 5. Описати цей процес зростання диференціальним рівнянням для $x(t)$.
82. Дріжджі в розчині цукру ростуть таким чином, що їх маса збільшується зі швидкістю, що дорівнює половині маси в момент t . Описати зміну маси дріжджів за допомогою диференціального рівняння.
83. В експерименті з голодуванням маса випробуваного за 30 днів зменшилася з 140 до 110 кг. Щоденні втрати маси, згідно зі спостереженнями, були

пропорційні масі випробуваного. Знайти масу досліджуваного після 15 днів голодування.

84. У разі вирощування в ідеальних умовах популяції мух їх кількість зростала б експоненціально зі сталою a , що дорівнює 0,1. Час рахується в днях. За припущенням початкова популяція дорівнює 100, умови росту ідеальні. Знайти розмір популяції через 10, 20, 50 днів зростання.
85. Нехай рівняння $dx/dt = 2x + e^{3t}$ відображає швидкість росту популяції $x(t)$ в момент часу t . Дати біологічну інтерпретацію кожному члену правої частини рівняння. Знайти розміри популяції в момент $t=0,1$, $t=0,2$, і $t=0,5$, якщо початковий розмір становить $x(0) = 50$.
86. Нехай $T(t)$ – різниця температур об'єкта і навколишнього середовища в момент часу t . Закон Ньютона стверджує, що у разі охолодження швидкість зміни різниці температур пропорційна самій різниці. Це означає, що $T(t)$ задовольняє диференціальне рівняння першого порядку $dT/dt = -kT$, де $k > 0$ – деяка стала, що є характерна для даного об'єкта і навколишнього середовища. Виразити через k тривалість часу, необхідного для того, щоб початкова різниця температур зменшилася вдвічі. Розрахувати час, через який різниця температур зменшиться до $1/4$ свого початкового значення.
87. Розглянемо ген з двома алелями A і a , які в деякій популяції в момент часу t зображені з частотами $p(t)$ і $q(t) = (1 - p(t))$. За припущенням алель A мутує в алель a в одиницю часу з імовірністю μ . Це означає, що $dp/dt = -\mu p$, μ - деяка стала, що називається частотою мутацій і є характерна для даного процесу. Виразити $p(t)$ і $q(t)$ через μ , якщо в початковий момент $p(0) = q(0) = 0,5$. Виразити через μ час, необхідний для того, щоб $p(t)$ зменшилася до $0,3$.
88. У популяцію великого розміру занесено інфекційне захворювання. Частка людей, які перенесли захворювання, зростає з часом. Нехай $p(t)$ позначає частку людей, які перехворіли на цю хворобу за t років після її виникнення в

популяції, і нехай $p'(t) = [1 - p(t)]/3$. Знайдіть $p(t)$ для усіх моментів $t > 0$, якщо $p(0) = 0$. За скільки років доля перехворілих досягне 90% ?

89. Споживання цигарок на душу населення в країні зросла з 50 шт. в 1920 р. до 6900 шт. в 2019 р. (дані приблизні). Вважаючи, що зростання споживання цигарок підпорядковується логістичному рівнянню і що межеве споживання становить 7000 шт., оцінити рівень споживання в 1930, 1960, 1990 і 2010 рр.
90. Розглянути популяцію $x(t)$, яка збільшується відповідно до рівняння логістичного росту $dx/dt = x(\beta - \delta x)$. Довести, що швидкість росту сягне максимального значення, коли розмір популяції дорівнюватиме половині рівноважного значення.
91. Популяція бактерій зростає від початкового розміру в 100 од. до граничного (рівноважного) розміру в 100000 од. Нехай протягом першої години вона збільшується до 120 од. Вважаючи, що зростання популяції підпорядковується логістичному рівнянню, знайдіть її розмір як функцію часу. Через скільки годин розмір популяції досягне рівня 1000; 10000; 50000 од.?
92. Одним з недоліків логістичної моделі росту популяції є той факт, що питома швидкість росту $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ прагне до свого максимального значення, коли популяція x мала. Дійсно, багато видів вимирають, коли їх популяції стають занадто малими. Нехай m відповідає мінімальному життєздатному розміру популяції такого виду. Популяції розміром, меншим m , будуть вимирати. Доведіть, що модифікація логістичного рівняння $dx/dt = x(\beta - \delta x)(1 - m/x)$ має таку властивість, що якщо $x < m$, то відбувається вимирання популяції. Тут $1 - m/x$ є корегуючий член, який враховує фактор, що не брався до уваги у вихідній моделі популяційного зростання.
93. Бактерії, що служать їжею для популяції простіших, надходять в експериментальне середовище з постійною швидкістю ω . Встановлено, що вони розмножуються зі швидкістю, пропорційною квадрату їх концентрації. Концентрація $c(t)$ бактерій в середовищі в момент t задовольняє, таким

чином, рівняння першого порядку $dc/dt = \omega - rc^2$, де r - позитивна стала пропорційності. Виразити концентрацію бактерій $c(t)$ через $c(0)$. Вчислити значення рівноважної концентрації бактерій, тобто за якого значення c похідна dc/dt наближається до нуля?

94. Зростання і поділ клітин визначаються потоком поживних речовин через оболонку клітини. Тобто на ранніх стадіях клітинного росту збільшення маси клітини пропорційне площі її поверхні. Якщо під час росту форма і щільність клітини не змінюються, то маса клітини $x(t)$ в момент t пропорційна кубу радіуса, а площа поверхні пропорційна квадрату радіуса клітини. Переконатися, що на ранніх стадіях росту $x(t)$ задовольняє рівняння першого порядку $dx/dt = cx^{2/3}$, де c - позитивна стала. Виразити масу клітини $x(t)$ в момент t через сталу c і початкову масу $x(0)$. Визначити час, за який маса клітини подвоїться, якщо $c=3$, а $x(0)=1$. У чому полягає обмеженість заданої моделі клітинного росту? Побудувати у вигляді диференціального рівняння таку модель, яка б враховувала, що існує максимальна маса, яку клітина не може перевищити.
95. У теперішній час для забезпечення їжею однієї людини необхідна площа 0,1 га. На земній кулі 4000 млн га пахотних земель. Тому, якщо не враховувати появу у майбутньому нових джерел їжі, населення Землі повинно бути обмеженим кількістю 40 млрд чол. Коли буде досягнуто цю межу насиченості населення, якщо воно неперервно зростає зі швидкістю 1,7% на рік?
96. Населення Землі у 2000 р. становило 5600 млн чол., а річний приріст населення дорівнював 60 млн чол. Знайти прогнозоване значення кількості населення у 2020 році.
97. В експерименті з голодуванням маса двох випробовуваних за 30 днів спала з 140 і 170 кг відповідно до 110 і 125 кг. Встановлено, що швидкість втрати маси кожним випробовуваним пропорційна його масі. Визначити $x(t)$ як сумарну масу двох випробовуваних після t днів голодування. Чому дорівнюватиме сумарна маса після 15 днів голодування?

98. Дві речовини C_1 і C_2 , беручи участь в хімічній реакції в рівних кількостях, дають нову речовину C_3 . Нехай a і b позначають початкові концентрації речовин C_1 і C_2 в момент часу $t=0$. Визначити $x(t)$ як концентрацію C_3 у довільний момент часу t . Швидкість збільшення концентрації C_3 виражається величиною $dx/dt = r(a - x)(b - x)$, де r - позитивна стала. Знайти концентрацію C_3 як функцію часу за $t>0$, якщо $x(0)=0$. Знайти межу концентрації C_3 , якщо $a = 10$, а $b = 15$.
99. У деяких хімічних реакціях окремі продукти можуть виступати каталізаторами власного утворення. Якщо $x(t)$ - кількість такого продукту в момент t , то моделлю такої реакції може виступати рівняння $dx/dt = rx(x - c)$. Реакція закінчується, коли $x = c$, тобто в результаті вичерпання одного з компонентів реакції. Виразити загальний розв'язок через сталі r , c , $x(0)$. Отримати шукане значення $x(t)$ для $r=1$, $c=100$, $x(0)=20$.
100. У моделі епідемії один заражений індивідуум вводиться у співтовариство, що складається з n індивідуумів, сприйнятливих до захворювання. Нехай $x(t)$ - чисельність незаражених індивідуумів в популяції в момент t . У припущенні, що інфекція поширюється на всіх сприйнятливих до захворювання, $x(t)$ буде зменшуватися від початкового значення $x(0) = n$ до нуля. Рівнянням для $x(t)$ може служити $dx/dt = -rx(n + 1 - x)$, де r - позитивна стала, що характеризує швидкість зараження. Знайти кількість заражених у довільний момент часу. Визначити час, коли швидкість поширення епідемії буде максимальною?

101. У деяких видів птахів загальний час, що витрачається на харчування, коливається від мінімального значення 2 год в день (влітку) до максимального значення 8 годин на день (взимку). Враховуючи, що зміни витрат часу на харчування описуються рівнянням гармонічного осцилятора, визначити тривалість добових витрат на харчування як функцію пори року.
102. У сприятливих умовах вирощують дві популяції мух. Для популяції 1 питома швидкість росту становить 0,1. Для популяції 2 аналогічна швидкість становить 0,08. Визначити $x(t)$ як сумарну чисельність двох популяцій в момент t . Знайти загальну чисельність популяцій через 10 і через 20 днів зростання, якщо в початковий момент розміри популяцій дорівнювали по 1000 од.

Список рекомендованої літератури

- Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях [Текст] / В.В. Амелькин. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
- Бейли, Н. Математика в биологии и медицине [Текст]: пер. с англ. / Н. Бейли. – М.: Мир, 1970. – 326 с.
- Горстко, А.Б. Познакомьтесь с математическим моделированием [Текст] / А.Б. Горстко. М.: Знание, 1991. – 162 с.
- Гудименко, Ф. С. Збірник задач з диференціальних рівнянь [Текст] / Ф. С. Гудименко, І. А. Павлюк, В. О. Волкова. – К.: Вища шк., 1972. – 152с.
- Гутер, Р.С. Дифференциальные уравнения [Текст] / Р.С. Гутер, А.Р. Янпольский. – М.: Высш. шк., 1976. – 304 с.
- Гроссман, С. Математика для биологов [Текст]: пер. с англ. / С. Гроссман, Дж. Тернер. – М.:Высш.шк., 1983. – 383 с.
- Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике [Текст] / Я.Б. Зельдович. – М.: Наука, 1970. – 560с.
- Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке. – М.: Наука, 1965. – 576 с.
- Киселев, А.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / А.И.Киселев, М.А. Краснов, Т.И Макаренко. – М.: Высш. шк., 1965. – 256 с.
- Краснов, М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / М.А. Краснов. – М.: Высш. шк., 1983. – 128 с.
- Марри, Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях [Текст]: пер. с англ. / Дж. Марри. – М.: Мир, 1983. – 396 с.
- Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / Н.М. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1967. – 565 с.
- Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Н.М. Матвеев. – Минск: Вышэйш. шк., 1987. – 319 с.

- Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И.Г. Петровский. – М.: Наука, 1984. – 271 с.
- Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений. [Текст] / К.К. Пономарев. – Минск: Вышэйш. шк., 1973. – 560 с.
- Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1970. – 331 с.
- Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения [Текст]: примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А.Кривошея, Н.А. Перестюк. – М.: Высш. шк., 2006. – 383 с.
- Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В.Степанов. – М.: ГИИТТЛ, 1959. – 473 с.
- Сясев, А.В. Диференціальні рівняння [Текст]: навч. посіб. / А.В. Сясев. - Д.: Вид-во ДНУ, 2007. - 356 с.
- Сясев, А.В. Конспект лекцій із курсу «Вища математика». Диференціальні рівняння першого порядку [Текст] / А.В. Сясев. – Д.: РВВ ДНУ, 2012. – 62 с.
- Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / М.В. Федорюк. – М. Наука, 1985. – 448 с.
- Филиппов, А.П. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А.П. Филиппов – М.: Наука, 1979. – 176 с.
- Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман. – М. Мир, 1970. – 720 с.

Зміст

Вступ	3
1. Процес радіоактивного розпаду	7
2. Хімічні реакції	13
3. Біологічні задачі	15
4. Процеси нагрівання (охолодження)	27
5. Задачі оптики	30
6. Задачі для розв'язання, які спираються на другий закон Ньютона	32
7. Витікання рідини з посудини	39
8. Задачі на концентрацію	41
9. Адіабатичний стиск повітря	42
10. Задачі, пов'язані з тепловими потоками	43
11. Реактивний рух	45
12. Геометричні задачі	48
13. Інші задачі та приклади їх застосувань	55
14. Завдання для самостійної роботи	71
Список рекомендованої літератури	86
Зміст	88